

## [ 共同研究成果 ]

## 液滴の帯電挙動を考慮した VOF シミュレーション

松川 嘉也：東北大学大学院工学研究科  
 酒田 一帆：東北大学大学院工学研究科  
 宮川 泰明：弘前大学大学院理工学研究科  
 齋藤 泰洋：九州工業大学大学院工学研究院  
 岡部 孝裕：弘前大学大学院理工学研究科  
 城田 農：弘前大学大学院理工学研究科  
 大黒 正敏：八戸工業大学工学部機械工学科  
 福野 純一：本田技研工業株式会社完成車生産技術部  
 青木 秀之：東北大学大学院工学研究科

## 1. 背景

自動車製造における塗装工程は自動車の商品価値を高める重要な役割を担っており、回転霧化塗装機が広く利用されている。本塗装機では、塗料をベルカップと呼ばれる回転体の遠心力によって微粒化した後に、印加した電場により塗料液滴の塗着効率を高めている。我々の研究グループでは回転霧化塗装機の塗装品質および塗着効率の向上を目的として、電場下における液体の微粒化挙動や車体表面への塗着挙動を支配する因子について調査を行っている。最近では、特に塗料の帯電量や電荷の分布が微粒化および塗着に大きな影響を与えていると考えている。これまで、液体が外部電場の影響により変形するマクロ的な現象に関して幅広く実験的検討が行われてきた[1-5]。しかし、液体の帯電挙動や内部の電荷の分布に代表されるミクロ的な現象に着目した検討は僅少である。その理由の一つに、電荷という肉眼では確認が不可能な対象に対して実験的検討が困難であることが挙げられる。そのため、数値シミュレーションを用いた検討が有効である。加えて、液体のダイナミックな変形を伴う現象の場合 volume of fluid (VOF)法を用いた混相流解析の枠組みで電磁気計算を行った例が複数存在する[6-13]。これまでに多種多様な電磁気計算モデルが考案されてきたが、Leaky dielectric model (LDM)に基づくもの[14]が多い。液体の電氣的緩和時間が液体の流動の特性時間よりも十分小さい場合に、電荷が二相間に瞬時に蓄積すると仮定するモデルであるが、LDMによる近似の取り扱いが研究者により異なる。一方で、回転霧化塗装機から射出される塗料のようにダイナミックな変形を伴う系において、LDMの適用の可否には疑問が残る。そこで、本研究では液体の変形を高精度に解析しながら液体の電磁氣的現象を十分に表現可能なモデルの構築を目指し、支配方程式の選定および液滴の帯電挙動に関する検証問題に取り組んだ。

## 2. 支配方程式

## 2.1. 電氣流体力学における電磁気の基礎式

Tomar *et al.*は解析対象の二相の誘電性および導電性の組み合わせに対して制限を課した上で、VOF法を用いた電氣流体力学シミュレーションを行った。流体運動の支配方程式は、Navier-Stokes方程式およびVOF関数の移流方程式である。解析対象の二相の組み合わせを絶縁体-絶縁体とした場合、電氣的緩和時間 $t_e(= \epsilon_0 \epsilon_r / \sigma)$ が流体運動の特性時間 $t_f(= \rho d^2 / \mu)$ よりも十分に長い場合液体内部の電荷の移動は考慮しない。ここで、 $\epsilon_0$ 、 $\epsilon_r$ 、 $\sigma$ 、 $\rho$ 、 $d$ および $\mu$ は真空の誘電率、連続相の比誘電率、電氣導電率、流体の密度、代表長さおよび流体の粘度を表す。絶縁性液体に外部から電場を印加すると、外部電場の影響を打ち消すために液体内部の分子が分極し液体内部に新たな電場が発生する。電磁気現象の支配方程式は、ガウスの法則から導かれる電位ポテンシャル $\phi$ のラプラス方程式である。

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \nabla \phi) = 0 \quad (1)$$

完全な絶縁性流体の場合、電荷の存在を無視するため電荷に関する基礎式は存在しない。また、電磁気現象は電気と磁気が相互に影響を及ぼす。一方で、電気流体力学では磁氣的緩和時間 $t_m (= \mu_M \sigma d^2)$ は電氣的緩和時間 $t_e (= \epsilon_0 \epsilon_r / \sigma)$ よりも十分に短いことから磁場の影響は無視できる。ここで、 $\mu_M$ は透磁率を表す。そのため、Maxwell 方程式における磁束に関する項を含む基礎式を解かない。式(1)から得られた電位ポテンシャルをもとに式(2)を用いて電気力 $\mathbf{F}_e$ を算出し、運動量保存式の外力項に組み込むことで流体運動と電磁気現象をカップリングする。

$$\mathbf{F}_e = \nabla \cdot \mathbf{T}_e = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} (\epsilon_0 \epsilon_r) \quad (2)$$

$\mathbf{E}$ および $E$ は電場ベクトルおよび電場の大きさを表す。電場ベクトルは電位ポテンシャルの勾配で表される(式(3))。絶縁体は電荷を保持しない。そのため、電気力には分子内の双極子に作用する分極力のみが含まれ電荷に作用するクーロン力は無視される。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (3)$$

一方で、解析対象を導電体-導電体とした場合、液体内部の電荷の移動を考慮しなければならない。Tomar *et al.* [15]は Leaky dielectric model (LDM)を用いることで電荷の移流を部分的に考慮した。LDMは Taylor によって提唱された[16]。液体が導電性を持つ場合、電氣的緩和時間 $t_e$ が流体運動の特性時間 $t_m$ よりも数オーダー短いことから電荷が二相界面に瞬時に蓄積すると仮定したモデルである。電磁気現象の支配方程式は式(4)のガウスの法則から導かれる電位ポテンシャルのポアソン方程式と式(5)で表される電流密度ベクトルの保存を表す式である。

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \nabla \phi) = -q \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla(\sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (5)$$

ここで、 $q$ および $\mathbf{J}$ は電荷密度および電流密度ベクトルを表す。式(5)は式(6)で表される時間依存を考慮する電荷密度の輸送方程式から導かれ、LDMを適用して非定常項を省略した式である。

$$\frac{Dq}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6)$$

式(4)および(5)から得られた電位ポテンシャルおよび電荷密度を用いて、式(7)から運動量保存式の外力項に組み込む電気力を求める。

$$\mathbf{F}_e = \nabla \cdot \mathbf{T}_e = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} (\epsilon_0 \epsilon_r) + q \mathbf{E} \quad (7)$$

絶縁体-絶縁体の場合と異なり液体内部に電荷が存在することから、電気力として分極力に加えてクーロン力が追加されている。

Lopez-Herrera *et al.* [17]は Tomar *et al.*の手法を拡張した。一切の仮定を用いずに電磁気現象を計算することで、解析対象の電氣的物性値に依存せずに解析が可能であることを報告した。流体運動の支配方程式は Tomar *et al.* [15]と同様である。電磁気現象の支配方程式は、式(4)の電位ポテンシャルのポアソン方程式と式(8)で表される電荷密度の輸送方程式である。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q \mathbf{u} - \sigma \nabla \phi) = 0 \quad (8)$$

## 2.2. 流体力学に関する支配方程式

既往のVOF法の枠組みで電気流体力学シミュレーションを行った例を概観した。本章の最終的な目的は、電氣的緩和時間の差異を計算しながら液滴内部の電荷分布を計算可能な電気流体力学シミュレーション手法の確立である。既往の手法では、電位ポテンシャルのラプラス方程式やポアソン方程式を第一に解くことで系内の電位ポテンシャルの分布を計算する。その後、電荷密度に関する輸送方程式を先に求めた電位ポテンシャルの分布を用いて解くことにより、新たな電荷

密度の分布を計算している．一方で，実現象においては電位ポテンシャルと電荷は相互に影響を及ぼす．よって，電位ポテンシャルのポアソン方程式および電荷密度の輸送方程式は同時に解く必要があると考える．また，これら 2 式を同時に解くことにより，電位ポテンシャルのポアソン方程式に含まれる誘電率 $\epsilon$ および電荷密度の移流方程式に含まれる電気導電率 $\sigma$ の寄与が同時に計算される．すなわち，電氣的緩和時間の影響が計算可能となる．そこで，本手法では電磁気現象の基礎式である電位ポテンシャルのポアソン方程式および電荷密度の輸送方程式を有限体積法に基づき離散化し，同時に行列ソルバーに与えることで，電位ポテンシャルと電荷密度の解を同時に求める手法を提案する．これ以降，本手法を **Coupled solver** と呼称する．

流体運動の支配方程式は，式(9)および(10)から成る Navier-Stokes 方程式および式(11)で表される VOF 関数の移流方程式である．

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u} \right) + \mathbf{F} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}f) = 0 \quad (11)$$

ここで， $\mathbf{u}$ ， $t$ ， $\rho$ ， $p$ ， $\mu$ ， $\mathbf{F}$ ，および $f$ はそれぞれ，速度ベクトル，時間，密度，圧力，粘度，外力ベクトルおよび VOF 関数である．電磁気現象の基礎式は，式(4)および式(8)である．誘電率および電気導電率の平均化手法についてシグモイド関数を用いた平均化の手法を採用した．

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{S(f)}{\sigma_1} + \frac{1-S(f)}{\sigma_2} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{S(f)}{\epsilon_1} + \frac{1-S(f)}{\epsilon_2} \quad (13)$$

ここで，シグモイド関数は以下の式で表される．二相界面付近で明確に気相セルと液相セルを表せるように， $a = 20$  とした．

$$S(f) = \frac{1}{1 - e^{-af}} \quad (a > 0) \quad (14)$$

これにより，二相界面付近での計算格子で誘電率および電気導電率を明確に分断される．実現象では気相において導電は生じず液相のみで導電が生じる．液滴内部において電荷が存在するように数値解析的な工夫を施した．**Coupled solver** における式(4)および式(8)の取り扱いについて説明する．式(4)および式(8)は互いに影響を及ぼすため二式を同時に満たすように連立させて解く．有限体積法に基づいて離散化する．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここで， $\mathbf{A}_i$ ， $b_i$ および $\mathbf{C}_i$ ( $i = 1, 2$ )は離散化係数である． $i = 1$  のとき式(4)から得られた離散化係数を， $i = 2$  のとき式(8)から得られた離散化係数を示す．得られた離散化方程式を式(15)の行列形式に格納し，疎行列ソルバーで解いた．得られた電位ポテンシャルおよび電荷密度から分極力ベクトルとクーロン力ベクトルの和で表される電気力ベクトル $\mathbf{F}_e$ を算出し，式(10)の外力項 $\mathbf{F}$ に組み込んだ． $\mathbf{E}$ は電位ポテンシャルの勾配から算出される電場ベクトルである．**Coupled solver** を採用することにより，二式を満たすように電位ポテンシャルおよび電荷密度が算出される．また，二式に含まれる誘電率および電気導電率も同時に計算されるため，電氣的緩和時間の影響も正確に計算することが出来る．

### 3. 解析条件

#### 3.1. 電気流体力学における電磁気の基礎式

電場が印加された解析領域に単一液滴を配置し、液滴の変形度合いを実験値および既往の研究例と比較した。本検証問題では Huang *et al.*の解析条件を模擬した[18]。疑似的な2次元の解析対象を図1に示す。  $x=0$  において対称境界であると仮定し、1/2 領域を解析領域とした。流体運動に関する境界条件として解析領域の南面を対称境界条件とし、その他の面をすべりあり境界とした。また、電磁気に関する変数に対して境界条件を与える必要がある。解析領域東面をアースし西面に正の電位ポテンシャルを与えることで  $x$  方向に一様な電場を発生させた。液滴の存在下では、液滴の誘電率の影響で電場は一様ではなくなり、液滴の誘電率の大きさに比例して液滴内部の電位勾配が増大する。北面の境界条件として電位ポテンシャルの勾配をゼロとした。ここで、電位ポテンシャルの境界条件を与えることと電荷密度の境界条件を与えることが同義であることを述べておく。  $10\text{ mm} \times 3\text{ mm} \times 0.3\text{ }\mu\text{m}$  の3次元解析領域を等間隔格子により  $x, y$  および  $z$  方向に  $1000 \times 300 \times 3$  分割した。初期条件として、直径  $R = 1.5\text{ mm}$  の液滴をその中心が  $(x, y, z) = (5\text{ mm}, 0\text{ mm}, 0\text{ mm})$  に配置した。液滴にはシリコンオイルの物性値を与え、周囲を水で満たした。詳細な液体の物性値に関して表1に記す。

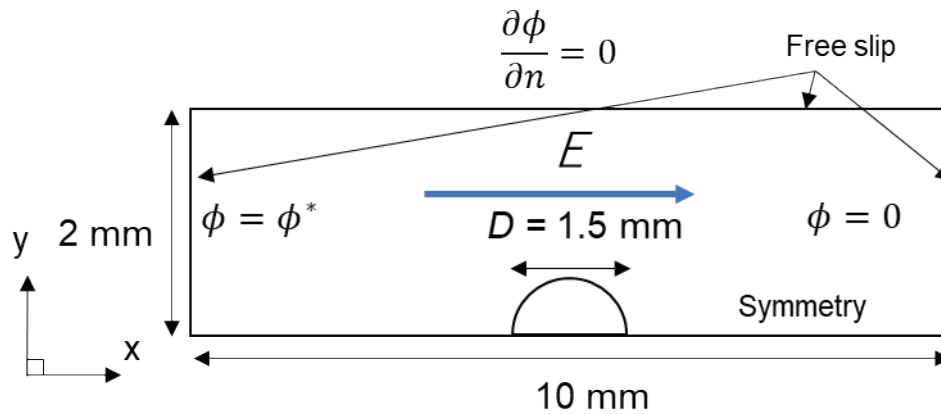


図1 解析対象

表1 シリコンオイルと水の物性値

	密度 [kg/m <sup>3</sup> ]	粘度 [mPa s]	比誘電率 [-]	電気伝導度 [S/m]	界面張力係数 [mN/m]
シリコンオイル (液滴)	960	870	2.26	$8.0 \times 10^{-14}$	26.7
水 (連続相)	1000	1.005	82	$2.0 \times 10^{-2}$	

支配方程式を有限体積法に基づき離散化した。時間進展に Crank-Nicolson 法を用いた。運動量保存式の移流項には TVD スキームを適用し流束制限関数には Min-Mod 関数を用いた。拡散項の離散化には二次精度中心差分法を用いた。VOF 関数の移流項の離散化に flux-blending interface-capturing schemes (FBICS) [19]を適用した。FBICS は bounded downwind (BD)スキームと high resolution (HR)スキームを適宜利用する離散化スキームであり、界面の再構築を必要としない。電荷密度の輸送方程式の移流項には運動量保存式の場合と同様に TVD スキームを適用し、流束制限関数には Min-Mod 関数を用いた。一方の、電気導電項の離散化に二次精度中心差分法を用いた。圧力速度結合解法として SMAC[20]を用い、圧力補正值のポアソン方程式は AMGS[21]を用いて解いた。その他の基礎式は AGMG[22–24]を用いて解いた。界面張力  $\mathbf{F}_s$  は二相の密度による重みづけを施した CSF [25,26]モデルから算出した。

#### 4. 結果と考察

図2に各 $Ca_E$ における液滴の変形度合いの時間変化に関するグラフを示す。 $Ca_E = 0.00$  [-]すなわち $\phi^* = 0.00$  kVの場合、液滴には電気力が作用しないため液滴は界面に作用する界面張力および圧力のつり合いにより初期の形状を維持した。 $Ca_E = 0.05$  [-]すなわち $\phi^* = 2.98$  kVの場合、時間の進展に伴い変形度合いは緩やかに増加したが、解析時間内に定常には達しなかった。変形度合いが正であることから液滴は解析領域の水平方向に扁平したことがわかる。解析終了時における変形度合いの値は**1.106**となった。 $Ca_E = 0.10$  [-]すなわち $\phi^* = 4.22$  kVの場合、解析初期において変形度合いは大きく増加したが、時間の進展にともない約0.05 s付近で増加の度合いが小さくなった。最終的に液滴の形状は定常に達していると定性的に判断し、最終的な変形度合いの値は**1.233**となった。 $Ca_E = 0.05$ の条件における結果と比較すると、最終的な液滴形状の変形度合いが増大している。これは電場強度の増大に伴い液滴に作用する電気力の強度が増大したためである。 $Ca_E = 0.15$  [-]すなわち $\phi^* = 5.17$  kVの場合、解析初期において変形度合いは $Ca_E = 0.10$  [-]の場合と比較してより急激に増加した。時間の進展に伴い約0.05 sを経過すると液滴の形状は定常に達したと定性的に判断した。最終的な変形度合いの値は**1.292**となった。 $Ca_E = 0.10$  [-]の条件における結果と同様に電場強度の増大に伴い液滴に作用する電気力の強度が増大した結果、液滴は大きく変形した。 $Ca_E = 0.20$  [-]、 $\phi^* = 5.97$  kVの場合、解析初期において変形度合いは $Ca_E = 0.15$  [-]の場合と比較してより急激に増加した。また、約0.02 s経過後、変形度合いの変化はいったん緩やかになったが0.04 s経過後に増加に転じ、最終的に定常へと達した。これまでの計算条件で見られなかった、変形度合いに二度の特異的な変化が観察された。一方で、最終的な変形度合いの値は**1.420**となった。本検証問題において最も強力な電場を印加したため、液滴は最も大きく変形した。

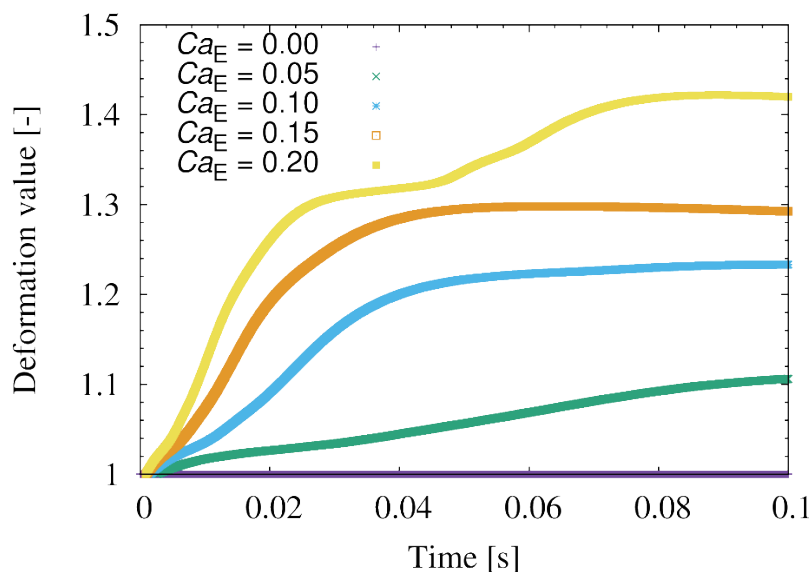


図2 変形の時間変化.  $Ca_E = 0.00, 0.05, 0.10, 0.15$  and  $0.20$ .

$Ca_E = 0.05$  [-]の条件を代表させて、解析領域内部の電磁気関連のプロファイルに着目することで液滴が解析領域の水平方向に扁平する機構に関して考察する。図3に解析領域内部の(a)電場強度、(b)分極力の大きさ、(c)電荷密度および(d)クーロン力の大きさの分布を示す。(a)電場強度の分布に着目すると、液滴の水平方向の界面付近に強力な電場が印加されている一方で、液滴の鉛直方向の界面付近では電場の強度が減衰している。これは、二相間の誘電率の差による影響である。液滴の水平方向の界面において、誘電率が大きく変化する一方で液滴の鉛直方向では誘電率の変化が小さいためである。(b)分極力の大きさの分布に着目すると液滴の水平方向の界面に強力な分極力が作用している。一方で、液滴の鉛直方向には微弱な分極力が作用している。これは、分極

力が液滴の界面方向に作用し、その大きさが電場強度に依存するためである。以上より、誘電率および電場の影響で液滴は水平方向に牽引されることが分かった。続いて、(c)電荷密度の分布に着目すると、液滴表面に電荷が対を成して蓄積している。これは、誘電率が異なる液滴が分極したことを表している。外部の電場の影響を打ち消すために液滴内部において、外部電場とは反対方向の内部電場が生じる。電荷の偏りが生じた場合にクーロン力が作用する。最後に(d)クーロン力の大きさの分布に着目すると、電荷密度が分布している界面において電場の大きさに比例したクーロン力が液滴に作用していることが分かる。クーロン力ベクトルの作用方向は電場ベクトルの方向に一致するため、液滴を水平方向に牽引するようにクーロン力が作用している。以上より、分極力とクーロン力の水平方向成分が液滴に作用することで、液滴は水平方向に扁平し、変形度合いの値が増大した。

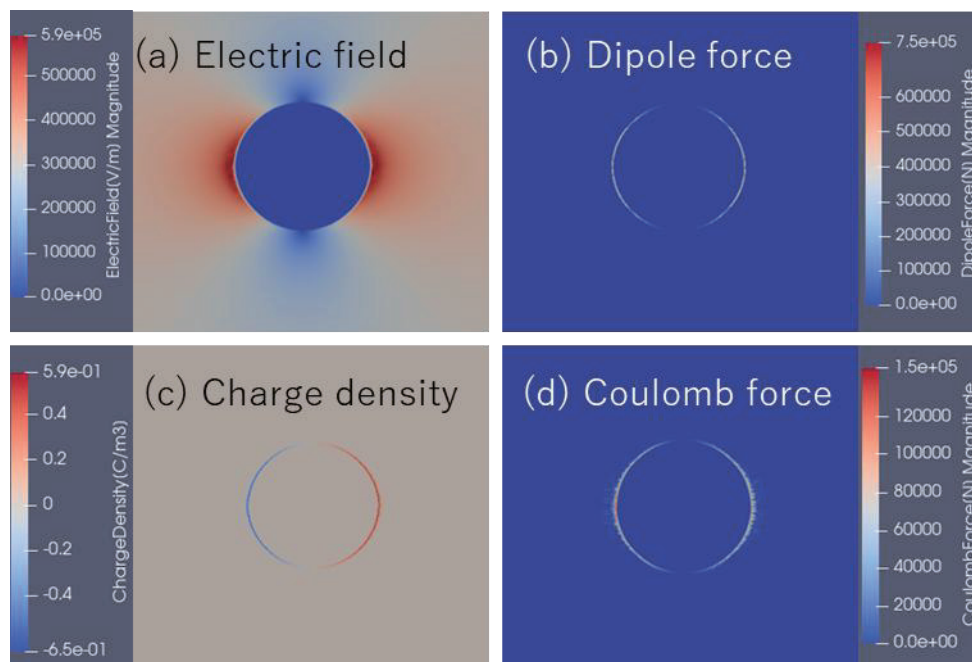


図3  $Ca_E = 0.05$  [-] and  $t = 0.01$  s における (a) 電場強度、(b) 双極子力、(c) 電荷密度、(d) クーロン力の分布

## 謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。また、研究にあたっては同センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただいた。

## 参考文献

- [1] T. S, C. RG, M. SG, Electrohydrodynamic deformation and burst of liquid drops, *Phil Trans Roy Soc Lond. Ser Math Phys Sci.* 269 (1971) 295–310.
- [2] R.L. Grimm, J.L. Beauchamp, Dynamics of Field-Induced Droplet Ionization: Time-Resolved Studies of Distortion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplets Exposed to Strong Electric Fields, *J. Phys. Chem. B.* 109 (2005) 8244–8250.
- [3] Y.-M. Jung, H.-C. Oh, I.S. Kang, Electrical charging of a conducting water droplet in a dielectric fluid on the electrode surface, *J. Colloid Interface Sci.* 322 (2008) 617–623.
- [4] P. Di Marco, R. Kurimoto, G. Saccone, K. Hayashi, A. Tomiyama, Bubble shape under the action of electric forces, *Exp. Therm. Fluid Sci.* 49 (2013) 160–168.

- [5] Y. Tian, Y. Liu, Z. Peng, C. Xu, D. Ye, Y. Guan, X. Zhou, W. Deng, Y. Huang, Air entrapment of a neutral drop impacting onto a flat solid surface in electric fields, *J. Fluid Mech.* 946 (2022) A21.
- [6] J.M. López-Herrera, S. Popinet, M.A. Herrada, A charge-conservative approach for simulating electrohydrodynamic two-phase flows using volume-of-fluid, *J. Comput. Phys.* 230 (2011) 1939–1955.
- [7] S. Sunder, G. Tomar, Numerical investigation of a conducting drop’s interaction with a conducting liquid pool under an external electric field, *Eur. J. Mech. - BFluids.* 81 (2020) 114–123.
- [8] A. Zhang, Y. Wang, D. Sun, S. Yu, B. Yu, Y. Li, Development of a VOF+LS+SPP method based on FLUENT for simulating bubble behaviors in the electric field, *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.* 71 (2017) 186–201.
- [9] J.M. López-Herrera, A.M. Gañán-Calvo, S. Popinet, M.A. Herrada, Electrokinetic effects in the breakup of electrified jets: A Volume-Of-Fluid numerical study, *Int. J. Multiph. Flow.* 71 (2015) 14–22.
- [10] B. Nath, G. Biswas, A. Dalal, Influence of electric field on deformation of a drop in shear flow, *Phys. Fluids.* 31 (2019) 042102.
- [11] M. Rahmanpour, R. Ebrahimi, A. Pourrajabian, Numerical simulation of two-phase electrohydrodynamic of stable Taylor cone–jet using a volume-of-fluid approach, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 39 (2017) 4443–4453.
- [12] Z. Wang, Q. Dong, Y. Zhang, J. Wang, J. Wen, Numerical Study on Deformation and Interior Flow of a Droplet Suspended in Viscous Liquid under Steady Electric Fields, *Adv. Mech. Eng.* 6 (2014) 532797.
- [13] G. Tomar, D. Gerlach, G. Biswas, N. Alleborn, A. Sharma, F. Durst, S.W.J. Welch, A. Delgado, Two-phase electrohydrodynamic simulations using a volume-of-fluid approach, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 1267–1285.
- [14] D.A. Saville, ELECTROHYDRODYNAMICS: The Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 29 (1997) 27–64.
- [15] G. Tomar, D. Gerlach, G. Biswas, N. Alleborn, A. Sharma, F. Durst, S.W.J. Welch, A. Delgado, Two-phase electrohydrodynamic simulations using a volume-of-fluid approach, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 1267–1285.
- [16] D.A. Saville, ELECTROHYDRODYNAMICS: The Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 29 (1997) 27–64.
- [17] J.M. López-Herrera, S. Popinet, M.A. Herrada, A charge-conservative approach for simulating electrohydrodynamic two-phase flows using volume-of-fluid, *J. Comput. Phys.* 230 (2011) 1939–1955.
- [18] X. Huang, L. He, X. Luo, H. Yin, D. Yang, Deformation and coalescence of water droplets in viscous fluid under a direct current electric field, *Int. J. Multiph. Flow.* 118 (2019) 1–9.
- [19] Y.Y. Tsui, S.W. Lin, T.T. Cheng, T.C. Wu, Flux-blending schemes for interface capture in two-fluid flows, *Int. J. Heat Mass Transf.* 52 (2009) 5547–5556.
- [20] A.A. Amsden, F.H. Harlow, A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comput. Phys.* 6 (1970) 322–325.
- [21] <https://hpcl.info.kogakuin.ac.jp/docs/amgs/>, (accessed on 2026/3/1).
- [22] Y. Notay, An aggregation-based algebraic multigrid method, *Electron. Trans. Numer. Anal.* 37 (2010) 123–146.
- [23] A. Napov, Y. Notay, An algebraic multigrid method with guaranteed convergence rate, *SIAM J. Sci. Comput.* 34 (2012) A1079–A1109.
- [24] Y. Notay, Aggregation-based algebraic multigrid for convection-diffusion equations, *SIAM J. Sci. Comput.* 34 (2012) A2288–A2316.
- [25] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach, A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Phys.* 100 (1992) 335–354.
- [26] D.B. Kothe, R.C. Mjolsness, M.D. Torrey, RIPPLE: A Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces, (1991).