

[共同研究成果]

ゲージ場の異常性に起因するモノポールによる QCD の クォーク閉じ込め機構のモンテカルロ法による研究

鈴木恒雄

大阪大学核物理学研究センター

協力研究員（石黒克也 高知大学理工学部門）

協力研究員（平口敦基 NYCU, 台湾）

1. 背景

陽子、中性子などの強い相互作用をするハドロンと呼ばれる素粒子は、クォークと呼ばれる粒子から構成されていることがわかっている。このクォークと呼ばれる粒子模型は、1963 年に Gell-Mann や Zweig 達によって提唱されたが、3 分の 2 とかマイナス 3 分の 1 とかいう半端な電荷をもっている。それまでは、整数荷電の粒子しか知られていなかった。このような分数電荷をもつ粒子は、もしあれば、実験で極めて容易に発見できるはずである。しかし、模型の提唱以降、60 年近くたつが、実験では、未発見である。模型提唱後、まもなく、クォークは、電荷以外にカラーの自由度を持っており、SU(3) という非可換ゲージ理論で記述され、クォークは、8 個のカラーをもつグルオンという粒子で相互作用が媒介されているという QCD (量子色力学) が提唱された。グルオンは、質量がゼロのスピン 1 の粒子で、これまでの摂動論的な場の量子論の枠組みでは、非常に深刻な赤外発散が予想され、理論的には、かなり大胆な理論であった。しかし、この深刻な赤外領域での発散は、むしろ、長距離でクォーク間の相互作用が強くなり、カラーを持ったクォークは、ハドロンの中だけで存在し、外部に出てこないのではという予想が出された。しかし、QCD を記述する非可換ゲージ理論は、グルオン自身が複雑な自己相互作用をするゲージ場となっており、数学的にも極めて難解な理論である。

その後、現実の世界である無限大の 3+1 次元ミンコフスキー空間の理論をユークリッド 4 次元空間に持っていき、しかも空間自体を、有限の大きさ V 、連続点でなく格子点でのみ自由度を持つような 4 次元の格子上の理論（格子間隔 a ）に制限し、その上で QCD を記述し、有限自由度の量子力学系とし、計算機を利用して、モンテカルロ法で様々な物理量を計算し、最後に格子空間サイズ V を無限大、格子間隔 a をゼロにとる極限をとって、連続での QCD を調べる手法[1]が導入され、摂動計算によらない厳密な非摂動的な QCD 研究が発展してきている。これまでの、モンテカルロ法での研究で、たしかにクォーク-反クォーク間には、距離に比例する線形のポテンシャルが、働いており、離せば離すほど相互作用が強まり、切り離すことができない、つまり閉じ込めが起こっていることが示された[2]。しかし、なぜそのようなことが生じているのかは、解明されていない。

2. クォークの閉じ込め機構の研究

QCD の提唱直後から、分数荷電粒子が未発見であることから、クォークのカラー自由度を閉じ込める機構が、QCD にあるのではないかという考えが提唱された。もっとも有力なのは、1974 年に 'tHooft [3] と Mandelstam [4] が独立に提唱した描像で、金属などで知られている超電導現象を説明

するマイスナー効果と類似で電場—磁場を入れ替えたような双対マイスナー効果が起こっているのではないかという考えである。超電導状態では、外から磁場をかけたとき、磁場を強くすると、超電導体中に外部磁場が線形に絞られて浸透するという現象が知られている。この現象を説明するのが、マイスナー効果とよばれ、超低温になると電子間に働く格子との引力が、クーロン斥力より大きくなることで、クーパー対というボーズ統計に従う結合状態を構成して、基底状態に凝縮することで、生じる電荷マイナス2の超電動電流によっておこることがわかっている。この現象の電場と磁場を入れ替えた描像、つまり、QCDの中に、なにかカラー磁氣的なモノポールが含まれていて、それが真空中に凝縮して、カラー電場を閉じ込めるという考えである。しかし、普通の超電導での世界は $U(1)$ の可換理論で取り扱いは容易であるが、QCD は $SU(3)$ という非可換ゲージ理論であり、何が磁氣的なカラーモノポールであるかということは、まったく不明であった。1981年に、tHooft [5] が、 $SU(3)$ 理論を本来不必要な追加の部分的なゲージ固定をおこない、 $SU(3)$ の最大可換部分群である $U(1) \times U(1)$ のみを残すようにすると、ゲージ固定後でも残っている $U(1) \times U(1)$ 理論でのゲージ場が、可換な光子場とみなせ、さらにゲージ固定のための関数が singular となり、その singularity を出す時空点に磁氣的なカラーモノポールが出てくるということを見つけた。それらのカラーモノポールが、真空中に凝縮すれば、対応する可換なゲージ場にあたる電場が絞られて閉じ込めを示せるという考えである。この考えは、格子上での QCD で調べられ、特に特別な部分ゲージ固定、最大可換ゲージでは、多くの重要な結果が示された。しかし、tHooft のこの考え方は、詳細は省くが、多くの深刻な問題があって、一般的には受けいられていない。そもそも本来不必要なゲージ固定に依存する考えで、不自然である。

3. 新しいカラーモノポールの提唱

2014年に筆者はQCDにおける新しいカラーモノポールのアイデアに気が付いた[6]。QCDは、クォークとグルオンから構成される理論であるが、閉じ込めを引き起こす機構は、グルオンの自己相互作用にあると考えられている。グルオンは別のカラー電荷をもって8個存在するが、お互いに複雑な相互作用をしている。質量はゼロで、相互作用定数は、質量次元を持っていない。まったく質量次元の定数を含んでいない理論から閉じ込め機構が働いて、弦定数などの質量を説明しなければならない。tHooftのような人為的な仮定を持ち込まずに、カラー磁氣的なモノポールを発見することが、極めて大切なことである。筆者は2014年にイタリアのピサのグループの仕事を読んで、重要な事実を発見した。それは、ゲージ場そのものが、半無限の線上の異常を持っていて、微分が可換とならないとすると、つまり通常は、成立する非可換ビアンキ恒等式が破れること、そしてその破れが、カラー磁氣的モノポールの存在につながる可換なビアンキ恒等式の破れと等価であるという関係式である。

ゲージ場を $A_\mu(x)$ と書く。もしも $[\partial_\mu, \partial_\nu] A_\alpha(x) \neq 0$ とすると、電場、磁場にあたる反対称2階テン

ソル場 $f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ の dual テンソル場つまり $\tilde{f}_{\mu\nu}(x) = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(x)$ が、

$\partial_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \neq 0$ となって可換な磁氣的なモノポールを生じる。

この関係式は、極めて単純なものであるが、これまでは、場の演算子はそのような微分交換不可能な異常性を持っていないということが、暗黙裡に仮定されていたし、通常の公理的な場の量子論では、前提となっていた。しかしそのような証明や根拠は存在していない。実際、1931年にDirac[7]が通常の電磁気学の量子力学の中で、磁氣的なモノポールが存在できるかということ考察した。その際、わかったことは、電磁場を記述するゲージ場が、微分交換不能な半無限の線形異常性を持っておれば、量子力学を矛盾なく定式ができるということを示した。しかし電磁気学では、実験的には電荷をもった粒子のみで、磁氣的なモノポールは発見されていないため、このようなゲージ場の異常性については、未発見である。

4. 新モノポールの重要性の検証

4.1 閉じ込めが 8 個の可換ゲージ場ごとに可換な現象として、成立していること

閉じ込め機構が生じていることは、非可換ゲージ場でできる Wilson loop と呼ばれる物理量の測定値が、面積側を示すこと、つまりクォーク-反クォーク間に線形のポテンシャル $V(r) = \sigma r$ が生じて、クォーク間を引き離そうとすることができないことから示される。グルオンの電場は、実際は 8 個のカラー成分からできているので、この結果は、いわばカラーに関する平均操作された結果といえる。われわれは、Multilevel 法と呼ばれる非常に有力な方法を適用して、カラー 1 種類の可換ゲージ場のみの電場を測定することで、まったく同じ線形ポテンシャルと弦定数が得られることを示した。この計算は膨大な計算量が必要で、必要となる internal update としては、格子サイズによるが、 $16^3 \times 16$ という場合でも 1000 万回という膨大な計算が必要であった。得られた結果の典型例を示す。

$\beta = 5.6, \quad 16^4$	σa^2	c	μa
V_{NA}	0.239(2)	-0.39(4)	0.79(2)
V_{A}	0.25(2)	-0.3(1)	2.6(1)

上記の表で V_{NA} は、カラー平均化された非可換ポテンシャルで V_{A} が一つのカラー成分に限定した値である。赤字の部分で、弦定数を示している。両者が、誤差の範囲で一致していることがわかる。

4.2 モノポールのみが線形ポテンシャルを説明すること

次に、この絞られた可換なカラー電場の振る舞いが、モノポールによるソレノイド型のカラー磁流によって生じていることが双対マイスナー効果の予言である。

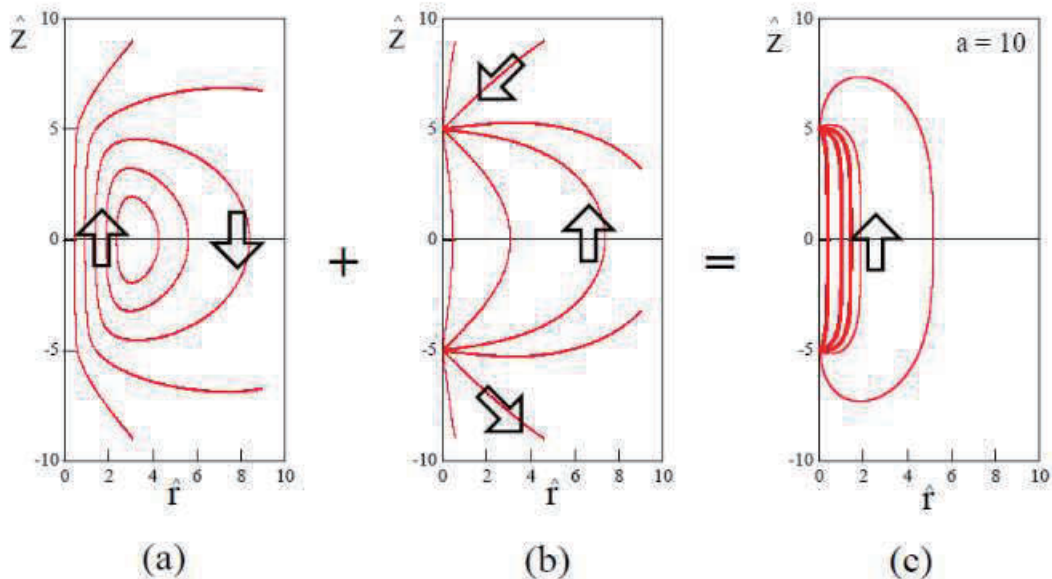
このことは、可換なゲージ場が、モノポールの寄与とそれ以外の寄与に分離でき、モノポールの寄与の部分のみが、線形ポテンシャルに寄与しているということから示される。この計算は、モノポールの寄与が非局所演算子を含むので、Multilevel 法は利用できない。そこで、ただひたすらに膨大な真空配位を用いて、モンテカルロ計算による平均操作が必要であった。もっともきれいに得られた計算結果を示す。この場合では、なんと 24 億個の真空配位が必要であった。

$SU(3)$	σa^2	c	μa	FR(R/a)	χ^2/N_{df}
V_{NA}	0.193(4)	0.422(3)	1.146(20)	1 - 10	0.99
V_{A}	0.184(15)	0.458(97)	2.912(80)	1 - 9	1.10
V_{mon}	0.188(16)	0.453(99)	2.906(82)	1 - 8	0.97

V_{ph}	0.0014(2)	0.073(5)	1.521(3)	1 - 11	1.00
----------	-----------	----------	----------	--------	------

上記の表で、 V_{mon} がモノポールの寄与である。赤字の部分に弦定数がある。非可換部分、可換部分、モノポールの寄与の弦定数が、きれいに一致していることが示されている。

• Profile of electric field in r - z plane



Sum of (a) solenoidal and (b) Coulombic electric fields creates (c) a flux tube.

4.3 双対マイスナー効果の証明

直接に可換なゲージ場が絞られ、浸透長が非可換部分と同様になること、ソレノイド型のモノポール磁流のみがその周りをまわっていること、さらに磁場の相関距離と呼ばれる量を、SU(3)QCD でも測定した。まだ、preliminary な結果ではあるが、真空のタイプを決める Ginzburg-Landau 係数（浸透長と相関距離の比）を測定すると、タイプ 1 の真空かタイプ 1, 2 境界領域であるという暫定的な結果も得ている。

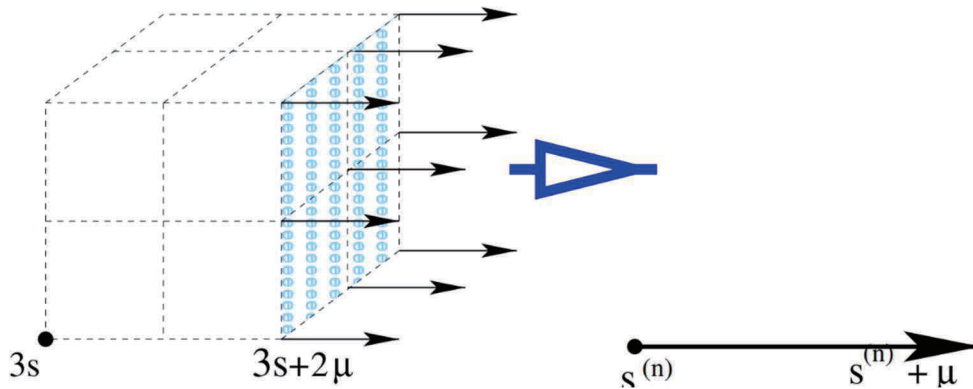
5. 新モノポールの連続極限の存在に関する証明

5.1 モノポール密度の連続極限

上記の結果は、格子上で得られた。格子間隔がゼロの連続の時空点、および無限大の空間の現実の世界で、モノポールが、実際に存在し、クォークの閉じ込めを起こしているかどうかを示す必要がある。そのために、まずは、上記のモノポールの密度という物理量を測定し、連続極限を調べた。モノポール密度は、正定値をとる量であるので、格子上で定式化するとどうしても避けられない人為的な連続極限では存在しないモノポールが、真空配位に無数に表れるが、これがすべてモノポール密度に寄与する。そこで、まずは、真空配位をそういう人為的なモノポールが鳴

るだけ生じないような滑らかな真空配位を発生させるようにしなければならない。そのために、3つの方法を導入した。最初の方法は、連続極限が調べやすい改良されたゲージ作用を採択した。2番目は、これまで滑らかな真空配位を生成するとして知られている4種類の異なる追加的なゲージ変換を行った。最大センターゲージ(MCG)、Direct Laplacian センターゲージ(DLCG)、最大可換 Wilson-loop ゲージ(MAWL)、最大可換ゲージ(MAG)の4種類である。3番目は、もっとも重要な手法で、モノポールのブロックスピン変換の導入とブロックスピン繰り込み群による考察である。ブロックスピン変換の模式図は以下のようである。

ex. $n=3$



ブロックされた格子上（格子間隔 $b = na$ でのモノポール（左辺））ともとの格子（格子間隔 a ）モノポール（右辺）

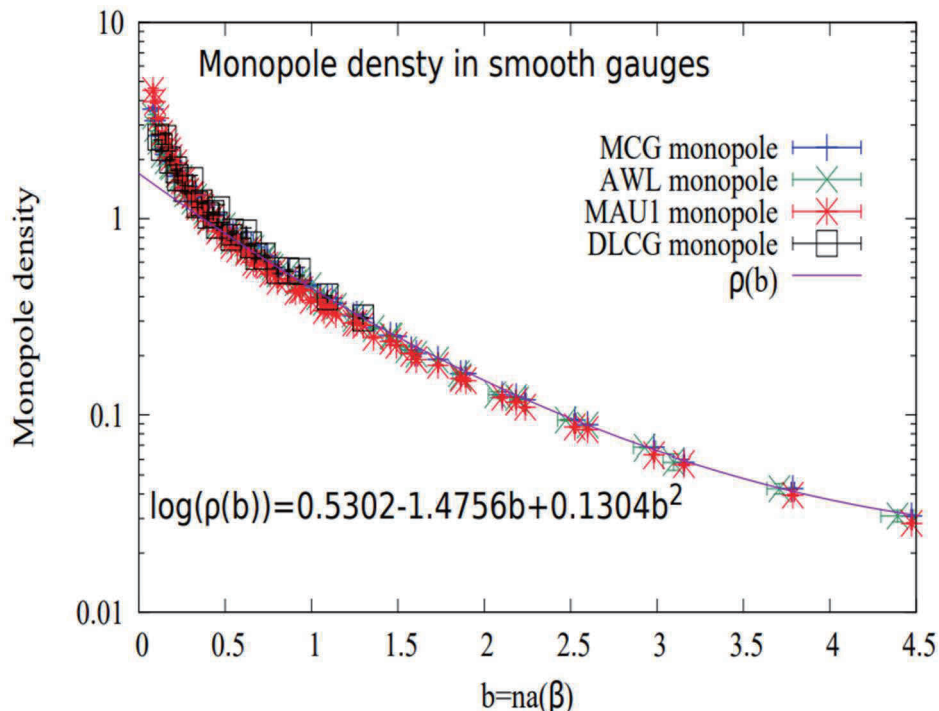
$$k_{\mu}^{(n)}(s_n) = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} k_{\mu}(ns_n + (n-1)\hat{\mu} + i\hat{\nu} + j\hat{\rho} + l\hat{\sigma})$$

$n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ blockings are adopted on 48^4 lattice.

$$\rho(a(\beta), n) = \frac{\sum_{\mu, s_n} \sqrt{\sum_a (k_{\mu}^{(n)a}(s_n))^2}}{4\sqrt{3}V_n b^3}$$

上記の左辺がモノポール密度の定義であるが、もともとは格子間隔 a とブロッキングの回数 n の2点関数である。しかし、このモノポール密度を、ブロックされた格子間隔、 $b=na$ でプロットすると、下に添付する図のように、モノポール密度は、 $b=na(\beta)$ のみの関数として、きれいな様子の関数で記述されることが分かった。この事実は、まさにこのモノポールが連続極限を持っていることを示している。なぜなら、 b の固定した点で、ブロックスピンの回数を無限大にすると格子間隔 a はゼロとなるからである。これは、連続極限である。

図 1: Comparison of the VNABI (Abelian-like monopoles) densities versus $b = na(\beta)$ in MCG, AWL, DLCG and MAU1 cases. A uniform curve is obtained for all gauges.



まとめ

筆者の一人、鈴木が 2014 年に発見した事実、つまり昔 Dirac が電磁場でのモノポールの量子力学でみつけたような、ゲージ場に半無限の微分の非可換性を許す異常性の存在を許すと、不自然な仮定をせずとも、QCD に可換なモノポールが導入できるという発見を、極めて大規模な長時間のモンテ・カルロ法を用いた格子上での QCD の計算で、確かめる研究を行った。予想通りのことが、生じていることが見つかった。まだ完全な連続極限を示すには、追加の計算が必要であるが、現時点までの結果を報告した。

謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンター、大阪大学サイバーメディアセンターおよび高エネルギー研究所のスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。非常に多くのデータを必要とし、予想以上に極めて難解な計算であったため、SX-Aurora で全体として 4 万 NH 以上の計算を必要とした。また、研究にあたっては上記センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただいた。

参考文献

- [1] K.G. Wilson, Physical Review D 10 (1974) 2445
- [2] M. Creutz, Physical Review D21 (1980) 2308.
- [3] G. 't Hooft, Proceedings of the EPS International (1976) 125.
- [4] S. Mandelstam, Phys. Rept. 23 (1976) 245.
- [5] G. 't Hooft,, Nucl. Phys. B190 (1981) 455.
- [6] T. Suzuki, HEP arXiv:1402.1294 (2014)
- [7] P. A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A 133 (1931) 60.
- [8] T.Suzuki, K.Ishiguro, V.Bornyakov,Phys. Rev. D 97 (2018) 034501.
- [9] T. Suzuki, Phys. Rev. D 97 (2018) 034509
- [10] T. Suzuki, A. Hiraguchi and K. Ishiguro, Report in APLAT 2020

- [11] T. Suzuki, Proceeding of Lattice 2021., July, 2021
- [12] A. Hiraguchi, Proceeding of Lattice 2021, July, 2021