

[共同研究成果]

直接数値解析を用いた仮想拡張した環状流路における亜臨界遷移の研究

— 局在乱流の間欠構造形成と DP 普遍性の探索 —

塚原 隆裕[†]・竹田 一貴[‡][†] 東京理科大学 理工学部 機械工学科[‡] 東京理科大学大学院 理工学研究科 機械工学専攻

円管内や平行平板間などの壁乱流に見る亜臨界遷移, そのメカニズムと普遍則の解明には理論的アプローチが困難で, 近年は大型ベクトル並列計算機を活用しての直接数値シミュレーション (DNS) によるアプローチが可能となってきた. 本研究では, 同軸二重円筒内の環状クエット流を対象にして, 乱流維持限界の下臨界レイノルズ数付近で観察される局在乱流の間欠構造に注目し, 円筒比に依存した構造形成や, 流路の周長制限による影響を明らかにすることを目指した. 特に, 大規模計算により亜臨界遷移過程における局在乱流の確率的分裂減衰挙動を捉え, 有向浸透現象 (directed percolation, DP) 普遍性としての特徴の有無を検討している.

1. 序論

水や空気など様々な流体の動き (流れ) は, 自然・社会・産業のあらゆる場面で生じており, それらの現象予測は例えば災害軽減・感染症対策・製品向上にも直結している. 近年は, 流体の運動方程式を数値的に取り扱う CFD (数値流体力学) シミュレーションが如何なる問題においても活用されており, 現象の理解や予測において重要なツールとなっている. 計算機性能の発展も留まることを知らず, 基礎研究のみならず民間航空機開発[1]や自動車後流制御[2]において3次元非定常乱流場をより忠実に再現できるようになり, 最適空力設計に貢献している. しかし, CFD 解析ツールもしくは流体力学そのものに残す課題は山積しており, その一つに層流—乱流間の亜臨界遷移問題がある. くだけた表現ならば, 「乱流のままではいられる条件 (レイノルズ数など) が分からない」のである. 流体力学の教科書[3]には「円管内の流れでは Re_c (臨界レイノルズ数) ≈ 2300 」との経験則を述べており, 理論的な臨界値の導出は絶望的である. また, その臨界付近で乱流は局在化して, 層流と乱流が空間的に共存した流れ場になるが, その特性は未解明である. たとえ円管内という単純な流れ場であっても亜臨界遷移は未だ挑戦的な問題であり, もしも解決に至れば乱流発生・維持・減衰の高精度予測が可能となり, 例えば次世代航空機開発や発電プラント安全性向上などにも資する知見獲得につながる. 本研究は, 規範的な流路を対象とする基礎研究ではあるが, 大規模な計算領域を用いた忠実な乱流シミュレーションにより臨界状態の非常にマクロなダイナミクスを探り, 亜臨界遷移にみる普遍性を明らかにするものである. 本章では以降, 円管内流れを含む各種壁面せん断流の亜臨界遷移に関する先行研究を概観し, 本解析対象と目的について述べる.

壁面せん断流の亜臨界遷移は, 前述の円管内流れで馴染み深いように, レイノルズ数 Re (例: $Re = \text{平均流速} \times \text{管直径} \div \text{動粘度}$) が線形安定性解析で求められる上臨界値 Re_L よりはるかに低いにもかかわらず, 層流領域と共存しながら局在乱流または乱流塊が大規模パターンを形成する. この乱流局在化という間欠性は, 主に流路形状に依存したものと考えられる. 円管内流れでは管軸方向 (主流方向) にのみ間欠性を有する “乱流パフ” が古くから知られ [4], 研究が続けられてきた[5]. その長い歴史から見れば, つい最近の 2011 年に Avila ら[6]が, 乱流パフの分裂・減衰時間に関するレイノルズ数依存性から, 大域安定性による下臨界値を見出した. さらには,

乱流パフの確率的分裂減衰挙動と有向浸透現象 (directed percolation, DP) との評価がなされ[7], 1986 年の Pomeau による乱流遷移における DP 普遍性の予言[8]が実証されつつある. つまり, 流体現象は Navier–Stokes 方程式による決定論的記述が可能でいながら, 確率論的解釈の可能性を示唆していることが興味深い. 他の流路形態においても, 大規模流路実験や大型計算機による解析が活発になってきた. テイラー・クエット流 [9], チャネル流 [10, 11], Waleffe 流 [12], 環状クエット流 [13], 二次元コルモゴロフ流 [14]と様々なせん断流の重臨界遷移過程に対して, DP 普遍性としての評価がなされており, 間欠構造が空間 1 次元的に広がりを持つ (1+1)-D DP, または空間 2 次元的な (2+1)-D DP の特徴が報告されている.

本解析対象である環状クエット流は, 流体が同軸二重円筒内で内円筒移動により軸方向に駆動された流れである (図 1). ここでの内円筒速度は U_w で一定とし, 円筒間のギャップ $h = r_{out} - r_{in}$ と動粘度 ν で無次元した Re_w が重要なコントロールパラメータである. さらに, 円筒比 $\eta = r_{in}/r_{out}$ も重要な幾何学的パラメータとなっている. 円筒比に応じて, $\eta \rightarrow 1$ で平面クエット流に漸近し, $\eta \rightarrow 0$ で極細芯を有する円管内流れとして (厳密ではないが) 見立てることもできる. 当該流れの重臨界遷移域では, 高円筒比で局在乱流が内円筒に螺旋状に巻き付く螺旋乱流を, 低円筒比で乱流パフを形成することが知られている[13]. それぞれの間欠性は, 平面クエット流および円管内流れのものに酷似しており, 流路の周長制限または曲率が間欠性の空間次元に影響を及ぼしているものと考えられる. そこで, Kunii ら[13]は周方向 (θ 方向) の計算領域を $L_\theta = 2\pi$ から仮想的に拡張することで, 低円筒比の通常流路では見られない乱流斑点や縞パターンを検出し, これが下臨界値を引き下げると共に DP 普遍性を発現することが示された. 当然ながら, この仮想拡張した環状流路は数値シミュレーションでなし得ることであり, 水路実験は不可能である. しかし, 周長制限を緩和した際に, 方程式系が如何なる解を見せるかが力学的に興味深いところである. さらなる周領域広さの仮想拡張を行う価値はあり, 大規模計算への期待がかかっている. 円筒比の違いによる周長制限や曲率が間欠構造 (縞~パフ) の形成に与える影響は依然不明であり, 下臨界値の円筒比依存性を含めこれら臨界現象の DP 普遍性調査が必須である.

本研究は環状クエット流重臨界遷移の円筒比依存性と DP 普遍性の包括的な理解を目的として, 円筒比 η を広い範囲で調査した. また, 大規模計算機を活用して十分広い仮想周領域を設定し, 可能な限り周長制限を排除した上で乱流挙動を捉えることで, 臨界付近における局在乱流の維持・広がりの本質と DP 普遍性を考察する.

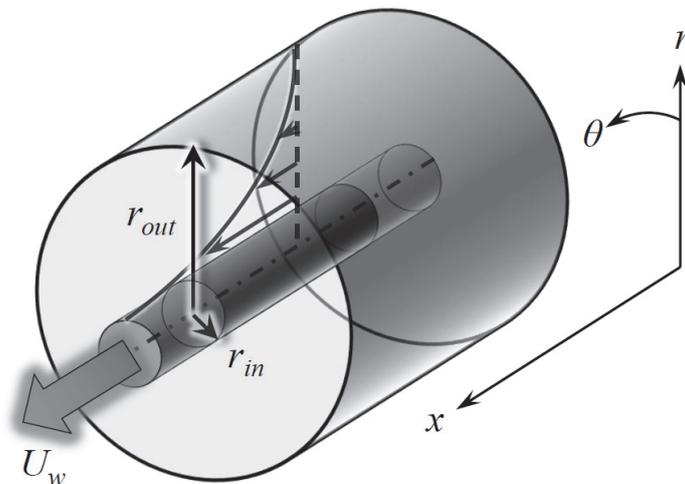


図1 環状クエット流の模式図と座標系

2. 計算対象と方法

非圧縮性ニュートン流体の環状クエット流 (図 1) を解析対象としており, x 方向に有限長の計算領域 ($L_x = 409.6h \sim 512h$) には周期境界を課して無限の管路を表現している. 主たるコントロールパラメータであるレイノルズ数 Re_w の減少後には十分時間をかけ, 主に統計的定常状態を議論する. また, 本解析対象における上臨界レイノルズ数は $\eta \geq 0.1415$ において $Re_L \rightarrow \infty$ で, $\eta = 0.1$ に対しても $Re_L = O(10^5)$ である[15]. いずれの流路系に対しても $Re_w \ll Re_L$ のまさに亜臨界レイノルズ数領域の調査であるため, 自発的に層流から乱流へ遷移することはない吸収状態転移を考慮することになる. よって, 一連の DNS 解析にて最初に比較的高い Re_w および初期擾乱を与えた場のシミュレーションを実施し, 十分発達した乱流場を初期条件として準静的に Re_w を下げていき, 大域的層流化に至るまでを各円筒比について調査した.

流体の速度 $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$ と圧力 p に関する支配方程式は, 円筒座標系の連続の式及び Navier–Stokes 方程式である.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで, t は時間, ρ は密度である. レイノルズ数は, ギャップ半幅 $h/2$, 円筒間相対速度の半値 $U_w/2$ を用いて $Re_w = U_w h / 4\nu$ と定義した. これは平面クエット流での定義に準拠している[16]. 円筒壁面は滑り無し条件, 周方向には周期境界条件を課すが, 仮想的に拡張した $L_\theta > 2\pi$ の場合に対しても同様に $\theta = 0$ と L_θ の間に周期境界条件が適用される. 通常流路 ($L_\theta = 2\pi$) の DNS では周方向に 32~512 分割の格子数 (η が大きいほど h に対する周方向領域が拡大し, 格子数も増える), 仮想拡張流路 ($L_\theta > 2\pi$) では 2048 の格子数を用いた. また, x 方向の格子数は 2048, r 方向には不等分割格子にて 64~128 分割とした. 時間刻み Δt は CFL 条件を満たす, 可能な限り大きな値を用いている.

本解析は一切の乱流モデルを用いない直接数値解析 (direct numerical simulation, DNS) を採用した. 式 (1), (2) のカップリングには Fractional-step 法を用いた. 時間進行は粘性項半径方向成分について 2 次精度 Crank–Nikolson 法を, その他の項に 2 次精度 Adams–Bashforth 法を用いた. 空間的離散化には有限差分法を用い, 主流及び周方向に 4 次精度中心差分を, 半径方向に不等分割格子の 2 次精度中心差分をそれぞれ適用した. 非圧縮性流体における圧力ポアソン方程式には, 高速フーリエ変換で波数空間にて解く解法を採用しているが, MPI 並列計算における計算速度のボトルネックとなりやすい箇所である.

3. 結果と考察

まず, 通常環状流路 ($L_\theta = 2\pi$) における間欠構造と下臨界値の円筒比依存性について述べ, 本章の後半に仮想拡張した流路における流れ場の特徴について報告する.

図 2 は低円筒比および高円筒比のそれぞれに見られる典型的な乱流間欠構造である. ここでは, x 方向速度変動 u_x' の等値面を三次元可視化しており, 統計的平衡状態に達した計算領域の “一部” (x 方向におよそ $1/4$) を表示している. 主流方向に伸びた筋状構造は高速/低速ストリークと呼ばれ, 壁乱流の準秩序構造としてもよく知られるが, それが流路 (壁面) 全域に分布せずに偏在している. つまり, ストリーク構造が密集している箇所が局在乱流で, それ以外は準層流領域と見なすことができる. さらに観察すれば, 図 2(a) は x 方向にのみ局在化した乱流塊であり円管内流れの乱流パフに酷似している. 塊の長さは外円筒直径の 20 倍程度であり, これも乱流パフと同じ特徴である. 以降は, 図 2(a) の局在乱流を乱流パフと呼ぶ. 図 2(b) は x 方向に加えて, θ 方向に

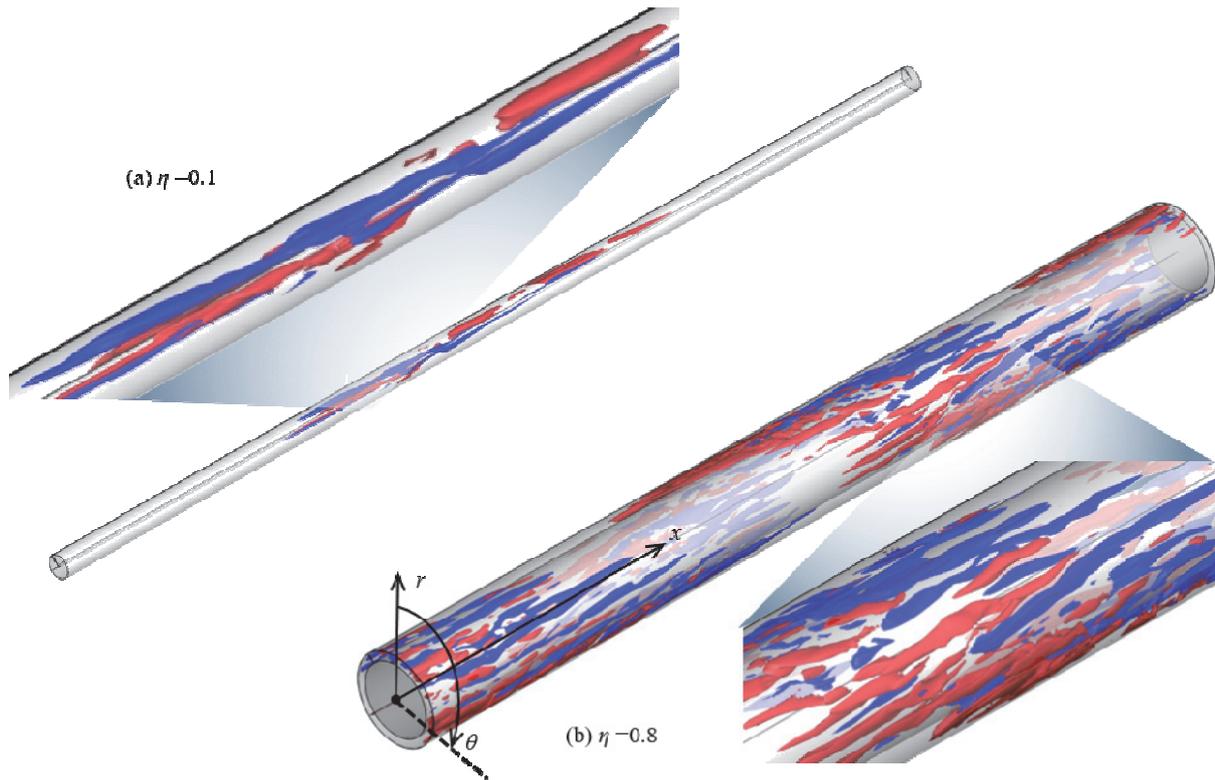


図2 環状ジェット流における乱流間欠構造. 円筒比 ($\eta = 0.1, 0.8$) に応じて乱流パフと螺旋乱流を形成する. 主流方向速度変動 (赤が正の変動, 青が負の変動を示す). 右上向きが主流方向で, 当該方向に $\Delta x \approx 100h$ の区間を可視化.

も局在乱流の間欠性を有しており, また規則的であることは可視化結果から明白である. 環状チャンネル内を螺旋状に取り巻いており, これは最初に環状ポアズイユ流[17,18]で報告された螺旋乱流である. 局在乱流が形成する帯は主流方向に対して一定の傾斜角度を維持しており, この角度は他の平面流で見られる乱流縞[10-12,16]とおおよそ一致している. つまり, 曲率を有する流路においても周長空間がある程度まで確保されていれば平面流と同様に, さらに流れの駆動方式にもよらず, 主流方向に対して斜めに帯状に局在乱流が形成されることが分かる. 乱流間欠構造が乱流パフか螺旋乱流かは, 円筒比 η (本質的には h に対する環状流路の周長) に依存してくる. 環状ポアズイユ流においては $\eta = 0.2 \sim 0.4$ で連続的に乱流パフ—螺旋乱流の間で遷移するが[18,19], 本研究対象の環状ジェット流ではやや高い η で切替りがある[13]. 本研究にて追計算によれば, $\eta = 0.5 \sim 0.7$ の間に分岐点の存在が示唆される. ここで, 図3に円筒間ギャップ中央の x - θ 面における半径方向速度変動 u_r' を可視化した瞬時速度場を示す. 当該速度成分の空間平均値は0となるため, u_r' 自体が速度変動成分に相当し, この分布を可視化すれば局在乱流域と層流域の区別が明確になる. 図3より, $\eta \geq 0.7$ では主流方向に対して傾いた帯状の局在乱流が形成される. このとき大域安定性による下臨界値 Re_g は同様の構造が形成される平面ジェット流 ($\eta \rightarrow 1$) の $Re_g = 324 \pm 1$ [16]と近いになり, Re_g の円筒比依存性は比較的緩やかであった. しかし, $\eta = 0.7$ の縞構造は対称性を失っており, 既に構造が周長制限を受けている. $\eta = 0.5$ では大規模な二次流れを伴う縞構造が形成されず, 乱流領域中に局所的な層流域が出現する“層流斑点”が形成され, 明確な間欠性を表さないまま急激に層流に遷移する特徴を持つ. このときの $Re_g|_{\eta=0.5}$ は $Re_g|_{\eta=0.7}$ に比べて10%ほど高くなった. また, $\eta = 0.3$ では, 周方向の間欠性を失い主流方向 (x 軸) にのみ間欠性を持つ乱流塊となったが, 円管内流れの乱流パフに比べて x 方向に長く, 異質なものが観察さ

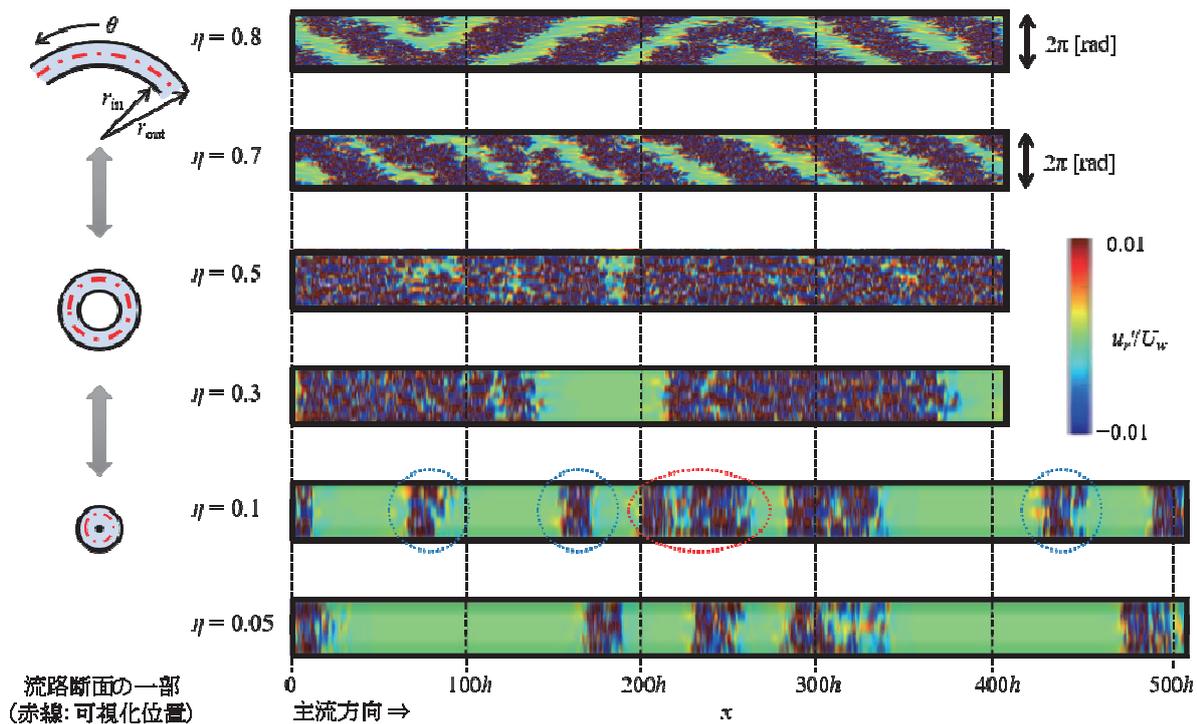


図3 典型的な瞬時の x - θ 二次元速度分布 (ギャップ中央の半径方向速度変動 u_r' 分布). 赤・青は正・負の速度を示し, 緑は層流領域に相当する. 縦軸は周方向座標として 2π で正規化しているため, 図の縦横比は実際の面のものとは異なる. それぞれのレイノルズ数は異なるが, 各円筒比における下臨界値 Re_g に近い条件での結果を可視化している.

れた. さらに $\eta = 0.05 \sim 0.1$ となれば乱流パフが流路内に複数個観測されるようになった. 図中の $\eta = 0.1$ の可視化図に青丸で示す箇所が乱流パフであり, 赤丸で囲まれた箇所は2つの乱流パフに分裂する瞬間を捉えたものである. 図4に示す乱流パフの時空間変遷は, Lemoultら [9]のクエット流における1次元空間間欠性を持つ局在乱流の挙動と同様な(1+1)-D DPの確率的分裂消滅の時空間分布と定性的に一致した. 図4には, 図3と同様の $L_x = 512h$ での結果に加えて, $L_x = 2048h$ ($N_x = 8192$) まで延長したものも示す. 定性的に両結果とも同じ傾向を示しているが, 図4(b)でしばしば $500h$ 程度の間欠性(局所的な層流化)が見受けられる. さらに Re_w が Re_g (≈ 406.9) に漸近すれば, この間欠性はさらに顕著となり, より大きな層流領域が発生し得るため, DP 普遍クラスの究明には $L_x = 2048h$ のような非常に大規模領域が依然として肝要である. Mukund & Hof [7]の実験では, 円管内流れの乱流パフの変遷を長時間・長空間にわたり図示しているが, 図4の結果ほどに乱流パフの分裂は生じておらず, さらなる検証は必要である.

周長制限を取り去るべく十分に広い周領域を持つ仮想環状流路では $\eta < 0.5$ で円筒比の低下に伴い Re_g は降下し, $\eta < 0.3$ で著しく降下する. 前述の通常流路とは逆の傾向であることに注意されたい. 図5に示す低円筒比における拡張流路で $Re_w = 262.5 \approx Re_g$ において, 局在乱流が頻繁に周方向へ広がり分裂する傾向(図中 B)や周方向に局在乱流同士が対消滅するように減衰する様子(図中 A)が観察された. 斑点状の局在乱流は主流方向には分裂を起こさず, 主流方向に独立な周方向1次元の間欠性を保持する. これは, $L_\theta = 2\pi$ かつ $\eta = 0.1$ で見られた主流方向の間欠性と全く異なる点で, 内円筒壁面が狭くなる低円筒比特有の強い周長制限の影響を受けていたといえる. ただし, Re_g から離れ, 乱流斑点が主流方向に密に存在する場合, 斑点は主流・周方向の2方向に相互作用する. つまり, Re_g ごく近傍以外では2次元空間的に広がる間欠性を持ち, Re_g ぐ

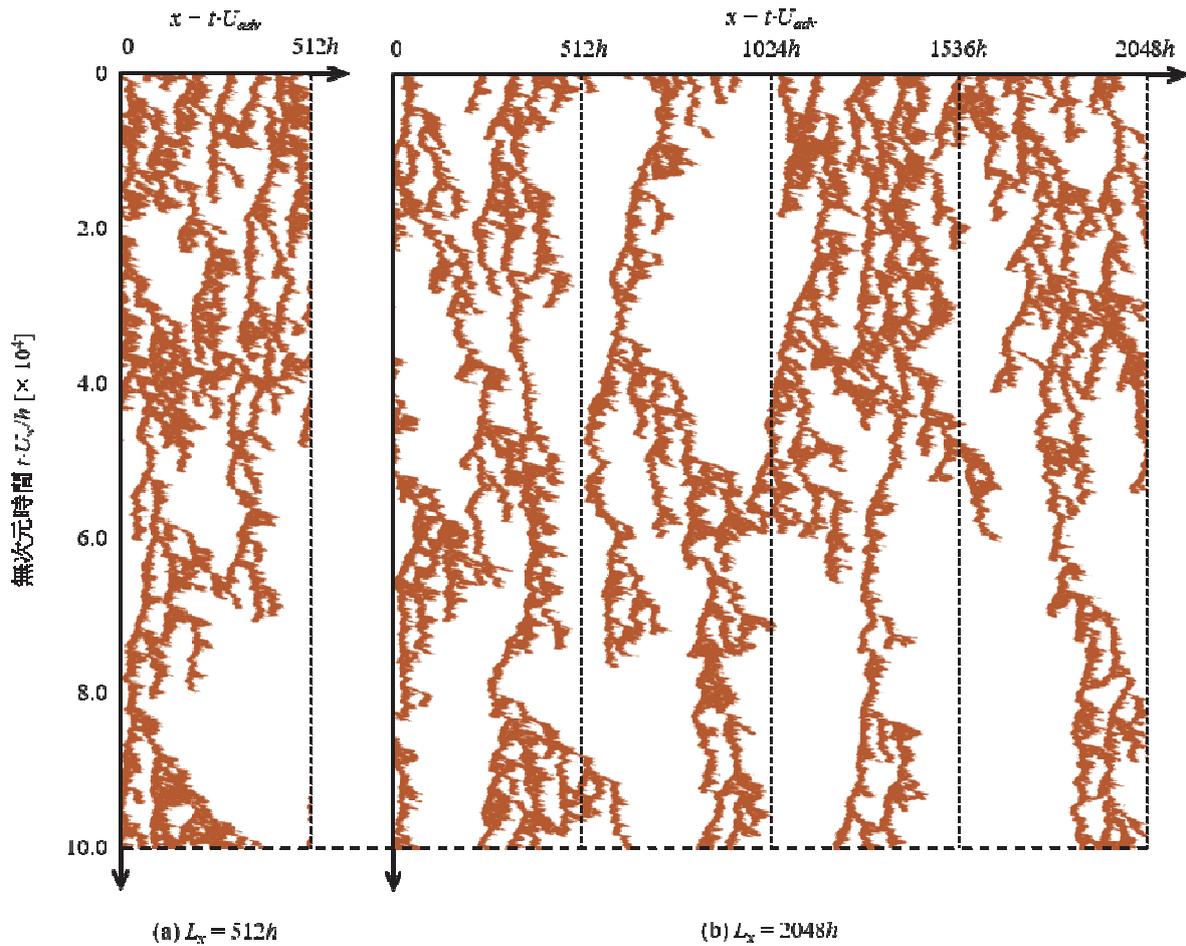


図4 局在乱流（乱流パフ）の時空間ダイアグラム． $\eta = 0.1$ の通常環状流路（ $L_\theta = 2\pi$ ）における $Re_w = 407.5$ の結果．横軸は一定速度 U_{adv} の移動座標を示し、およそ乱流パフ伝播と一致．

く近傍で周方向にのみ広がりを持つ1次元の間欠性が発現する．亜臨界遷移過程と大規模間欠構造の時空間間欠性に関してスケーリングを用いて整理することで DP 普遍性の評価を行った．図4で示すような場を対象に、i) 臨界クエンチングによる乱流間欠率 $F(t)$ の時間変化とそれに伴う(1+1)-D DP としてのスケーリング仮説検証、ii) 乱流間欠率の統計的定常値のレイノルズ数依存性、iii) 周方向空間間欠性に関する確率密度分布、以上の3点から DP 普遍クラスとしての検証を行った．結果の詳細は既報[20]を参照されたいが、結論として(2+1)-D DP と(1+1)-D DP のクロスオーバーが同一系で実現しうることが示唆された．

4. 計算性能

本研究では、ベクトル化効率を上げた自作 Fortran コードを用いて高負荷の DNS を実施している．よって、SX シリーズなどのベクトル型計算機でその実行効率は発揮されるが、以下に SX-ACE や次世代機の SX-Aurora TSUBASA を用いた現状性能を記す．

4.1 SX-ACE

本研究の一条件にて格子数 $N_x \times N_y \times N_z = 2048 \times 64 \times 2048$ で 100,000 ステップ分のプログラム性能を抜粋して表1に示す．このとき、東北大学サイバーサイエンスセンターの SX-ACE にて実行し、ノード内 OpenMP 並列化および 32 ノード間 MPI 並列化を施したコードでの検証結果である．

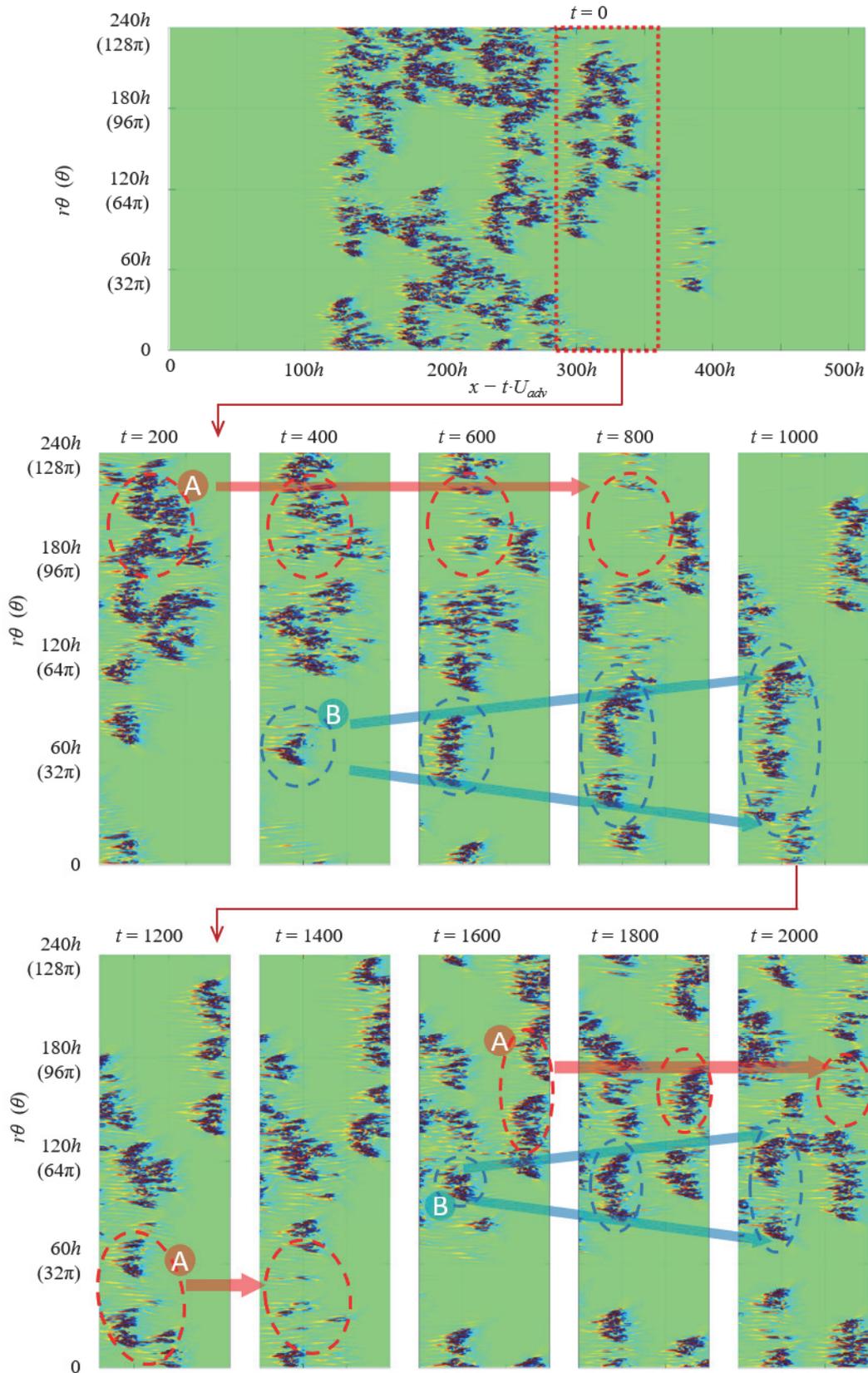


図5 瞬時場の時系列変化. 半径方向速度変動 u_r' . 可視化面はギャップ中央部 $r = (r_{in} + r_{out})/2$ で, 下部の図は局在乱流とおおよそ同じ速度で移動するフレームから抽出. $\eta = 0.1$ の仮想拡張流路 ($L_\theta = 128\pi$) における $Re_w = 262.5$ の結果. 図中 A は局在乱流の対消滅が, B で分裂が見られる.

表1 プログラム性能 (SX-ACE). 100,000 ステップ分の計算結果.

実行時間 [hh:mm:ss]	14:37:38	プロセッサ同時実行時間 (1 node)	
CPU 時間 [hh:mm:ss]	1,744:57:40	Conc. Time (≥ 1) [sec]	52,109
総 Flops 値 (concurrent)	419.8×10^9	Conc. Time (≥ 2) [sec]	48,079
ベクトル長	247.7	Conc. Time (≥ 3) [sec]	48,066
ベクトル換算率	99.2%	Conc. Time (≥ 4) [sec]	47,855
MIPS (concurrent)	330.6	バンクコンフリクト[sec]	24,188

4.2 SX-Aurora TSUBASA

前述の計算条件とは異なるが、同一コードによる DNS を東北大学サイバーサイエンスセンターの SX-ACE の単ノード OpenMP 並列計算と、次世代機 SX-Aurora TSUBASA を用いた同計算を比較検証した。SX-Aurora TSUBASA は当研究室が保有する A300-2 ラックモデル (1VH・2VE) を用いており、搭載 CPU は Xeon Gold 6126、ベクトルエンジンは 10B-P モデルで倍精度演算性能 2.15 TFlops のスペックである。表 2 で示されるように、単一ノードの同コア数計算で比較すれば、SX-Aurora TSUBASA は SX-ACE に比べて 4 倍近くの速度性能を有する。

表2 プログラム性能 (SX-Aurora TSUBASA). 1,000 ステップ分の 1 ノード計算結果.

使用機	コア数/ノード	格子数	実行時間
SX-Aurora	8	$2048 \times 64 \times 1024$	7.5 min
SX-Aurora	4	$2048 \times 64 \times 1024$	11.0 min
SX-Aurora	2	$2048 \times 64 \times 1024$	17.5 min
SX-Aurora	1	$2048 \times 64 \times 1024$	40.0 min
SX-Aurora	8	$1024 \times 64 \times 1024$	4.0 min
SX-Aurora	4	$1024 \times 64 \times 1024$	6.0 min
SX-Aurora	2	$1024 \times 64 \times 1024$	9.5 min
SX-Aurora	1	$1024 \times 64 \times 1024$	22.5 min
SX-ACE	4	$2048 \times 64 \times 1024$	38.5 min
SX-ACE	4	$1024 \times 64 \times 1024$	18.5 min

5. 結言

環状クエット流の亜臨界遷移を対象に DNS を実施し、間欠構造と下臨界値 Re_g の円筒比依存性を調査した。また、通常系 ($L_\theta = 2\pi$) に加え、周領域を仮想延長した系 ($L_\theta \gg 2\pi$) の解析を行い、周長制限が構造形成と維持に与える影響、DP 普遍性に関して調査した。

本解析では円筒比の違いで縞-螺旋-パフが現れることを示した。低円筒比では周長制限により乱流パフを形成するが、下臨界値が有意に上昇した。周方向の仮想拡張により周長制限を緩和すると、局在乱流はさらに低いレイノルズ数でも維持することが分かり、特徴的な斑点状の乱流間欠構造を検出した。DP 普遍性としての特徴調査の結果、(2+1)-D と(1+1)-D DP のクロスオーバーが見られ、吸収状態 (層流) 直前の臨界現象は (1+1)-D DP 普遍性が顕著になることが示された。現在、円管内流れにおける乱流パフの分裂・消滅に関する理論的解釈は低次元化された力学系モデル[5]での説明もなされているが、平面流での乱流縞や高円筒比環状流での螺旋構造に対する低次元モデルは未だ存在せず、本研究のような大規模 3 次元 DNS に頼っている。今後もしくは、大規模 DNS の実現に SX-Aurora TSUBASA のように高性能のスーパーコンピュータ利用が不可欠ではあるが、乱流縞-乱流パフの形成維持に関する本質的違いの説明が今後の課題であり、将来的にそれらを包括的に表現する低次元モデルの提案が期待される。

本研究結果の詳細については既報[20,21]を参照されたい。

謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータ SX-ACE を利用することで実現することができた。また、MPI 並列計算にあたっては同センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただき、計算結果の後処理においては Yohann Duguet 博士 (仏 LIMSI-CNRS) と有意義な議論をさせて頂いた。本研究は、JSPS 科研費 (基盤研究 (B) JP19H02071) の助成を受けて行われたものである。ここに記し、感謝の意を表する。

参考文献

- [1] 前田一郎, “民間航空機開発における大規模 CFD 解析の適用 (その 4)”, 東北大学サイバーサイエンスセンター大規模科学計算システム広報 SENAC, **53(2)**, pp. 19–25, 2020.
- [2] 藤井孝藏, 浅田健吾, “DBD プラズマアクチュエータを用いた自動車後流制御による抵抗低減”, 東北大学サイバーサイエンスセンター大規模科学計算システム広報 SENAC, **53(1)**, pp. 15–24, 2020.
- [3] JSME テキストシリーズ 流体力学, 日本機械学会, p. 93, 2005.
- [4] Wgnanski, J. and Champagne, F. H., “On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug,” *J. Fluid Mech.*, **59**, 281–335, 1973.
- [5] Barkley, D., “Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe,” *J. Fluid Mech.*, **803**, P1, 2016.
- [6] Avila, K. *et al.*, “The onset of turbulence in pipe flow,” *Science*, **333** (2011), 192–196.
- [7] Mukund, V. and Hof, B., “The critical point of the transition to turbulence in pipe flow,” *J. Fluid Mech.*, **839**, 76–94, 2018.
- [8] Pomeau, Y., “Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **23**, 3–11, 1986.
- [9] Lemoult, G. *et al.*, “Directed percolation phase transition to sustained turbulence in Couette flow,” *Nature Phys.*, **12**, 254–258, 2016.
- [10] Sano, M. and Tamai, K., “A universal transition to turbulence in channel flow,” *Nature Phys.*, **12**, 249–253, 2016.
- [11] Shimizu, M. and Manneville, P., “Bifurcations to turbulence in transitional channel flow,” *Phys. Rev. Fluids*, **4**, 113903, 2019.
- [12] Chantry, M. *et al.*, “Universal continuous transition to turbulence in a planar shear flow,” *J. Fluid Mech.*, **824**, R1, 2017.
- [13] Kunii, K. *et al.*, “Laminar-turbulent coexistence in annular Couette flow,” *J. Fluid Mech.*, **879**, 579–603, 2019.
- [14] Hiruta, Y. and Toh, S., “Subcritical laminar-turbulent transition as nonequilibrium phase transition in two-dimensional Kolmogorov flow,” *J. Phys. Soc. Japan*, **89**, 044402, 2020.
- [15] Gittler, P. “Stability of axial Poiseuille-Couette flow between concentric cylinders,” *Acta Mech.*, **101**, 1–13, 1993.
- [16] Duguet, Y. *et al.*, “Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow,” *J. Fluid Mech.*, **650**, 119–129, 2010.
- [17] T. Ishida, Y. Duguet, and T. Tsukahara, Transitional structures in annular Poiseuille flow depending on radius ratio, *J. Fluid Mech.*, **794**, R2, 2016.
- [18] 塚原隆裕, 石田貴大, “直接数値解析による環状流路ポアズイユ流の亜臨界遷移の研究”, 東北大学サイバーサイエンスセンター大規模科学計算システム広報 SENAC, **52(2)**, pp. 9–17, 2019.
- [19] Ishida, T. *et al.*, “Turbulent bifurcations in intermittent shear flows: from puffs to oblique stripes,” *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 073902, 2017.
- [20] Takeda, K. *et al.*, “Intermittency and critical scaling in annular Couette flow,” *Entropy*, **22**, 988, 2020.
- [21] 竹田一貴, 塚原隆裕, “環状クエット流の亜臨界遷移における局在乱流構造と DP 普遍性の円筒比依存性”, 日本流体力学会年会 2020 講演論文集, 5 pp. (2020).