

[共同研究成果]

複数領域 FDTD (時間領域差分) 法の高速化

有馬 卓司, 宇野 亨

東京農工大学 大学院工学研究院 先端電気電子部門

本報告では、電磁界解析手法の一つである FDTD 法の高速計算手法について述べる。FDTD 法は差分法を用いており計算コストが比較的多いのが特徴である。また、FDTD 法の解析空間を複数領域に分け、領域同士を数学的に結合させる複数領域 FDTD 法も提案されているが、この手法も結合の計算に多くの計算が必要であり、有効性が限られていた。本報告では、この複数領域 FDTD 法に注目しその高速化手法を示す。高速化には、画像処理などで用いられている四分木構造の考え方を活用している。

1. 複数領域 FDTD 法

電波は、通信だけでなく電子レンジや自動車の衝突防止レーダなど様々なところで使用されている。これら電波を用いた機器の開発においては、計算機を用いた数値解析を活用する事で実験や試作を減らすことが出来るので有用である。電磁界解析の主要な方法の一つに FDTD (Finite Difference Time Domain : 時間領域差分) 法がある[1]。この手法は、電磁界を支配するマクスウェルの方程式を直接差分し、電界および磁界を求める手法である。差分法は一般的に計算量が多くなることが知られており、FDTD 法も多くの計算機資源が必要となる。FDTD 法の計算量を削減する手法がいくつか提案されている。計算削減手法の一つに複数領域 FDTD 法[2]が提案されている。この手法の概念を図 1 に示す。

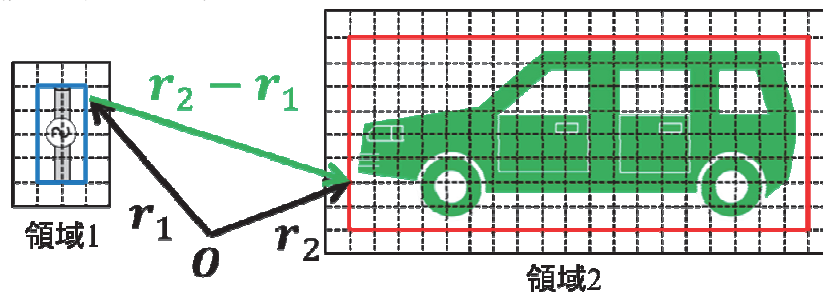


図 1 複数領域 FDTD 法の概念

図 1 に示すように複数領域 FDTD 法においては、解析空間中で波源や散乱体のない自由空間の計算を FDTD 法では行わず、数学的にその結合を評価する手法である。この手法は、FDTD 法自体の計算領域を大幅に減らせることから計算量削減が期待できる。一方、複数領域同士の結合には複雑な積分が必要になる。ここでは例として、複数領域 FDTD 法において領域 2 における電磁界を、領域 1 の電磁界から数学的手法で求める方法を説明する。まず、図 1 の領域 1 内に仮想的に設置された青枠で示される閉曲面上の電界および磁界より、等価電流 $\mathbf{J}_1$ および等価磁流 $\mathbf{M}_1$ を求める。そして求めた、等価電磁流と自由空間のグリーン関数 G を用いて、領域 2 における電界は(1)式のように求められる。

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_2, \omega) = \int_{S_1} \left[-j\omega\mu \mathbf{J}_1(\mathbf{r}_1, \omega) G(\mathbf{R}) - \mathbf{M}_1(\mathbf{r}_1, \omega) \times \nabla_1 G(\mathbf{R}) + \{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_1, \omega)\} \nabla_1 G(\mathbf{R}) \right] dS_1 \quad (1)$$

(1)式中で、 $\mathbf{R}$ は領域 1 から領域 2 に向かうベクトルである。また、 $\hat{\mathbf{n}}_1$ は領域 1 に設定した仮想閉曲面の法線ベクトルである。この面積分を行えば、領域 1 で生じた電磁界を基に領域 2 において

正しい電界を再構成できることを示している．この面積分によって電界を再構成する原理は等価定理と呼ばれている．磁界についても同様に再構成できる．一方，(1)式の計算は，領域2のある点の電界を求めるために，領域1に設置した仮想閉曲面全体にわたり積分を実施する必要がある．すなわち，図1の領域2に示す赤枠の仮想的な閉曲面上のすべての電磁界を再構成するには膨大な計算量となることが分かる．

複数領域FDTD法による計算例を示す．計算モデルは図2に示すように，一つの領域に全長150mmのダイポールアンテナがあり，その領域の中心から84mm離れたところに完全導体があり，この領域をアンテナとは別の領域としている．(1)式の等価定理を計算するための仮想閉曲面の大きさ，および電界を再構成するための仮想閉曲面の大きさはそれぞれの領域において， $36\text{mm} \times 36\text{mm} \times 210\text{mm}$ および $108\text{mm} \times 108\text{mm} \times 108\text{mm}$ としている．FDTD法のメッシュサイズは各方向にそれぞれ3mmとした．図3に解析結果を示す．この結果は図2中に示されている”Observed point”における電界を通常のFDTD法と複数領域FDTD法で計算した結果である．図3において，赤の点線で示されているものは通常のFDTD法を用いて解析領域を分けずに計算した結果である．緑の実線で示されている結果は複数領域FDTD法での計算結果である．通常のFDTD法と同様の結果が得られているが，計算時間を進めていくと不安定になる事が分かる．青の実線で示された結果は，安定化のフィルターを通したものである．このように，安定化のフィルターが必要ではあるが，通常のFDTD法と同様の結果がえられる．一方計算時間であるが，このモデルでは領域と領域の距離が近いために複数領域FDTD法のメリットが現れず複数領域FDTD法の方が多くの計算時間を必要とする．

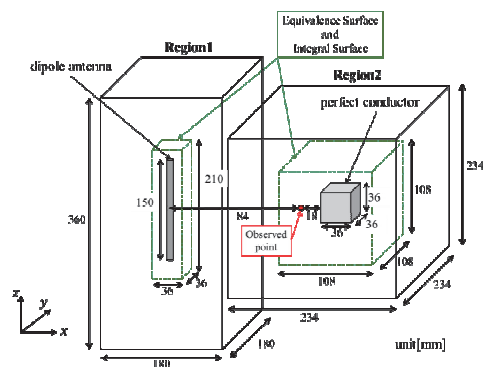


図2 解析モデル

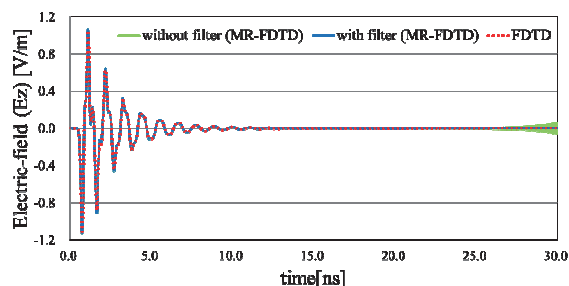
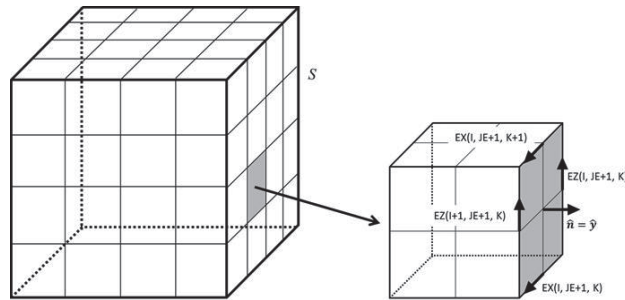


図3 複数領域FDTD法の解析結果

2. 四分木構造を用いた複数領域FDTD法の計算量削減について

2.1 複数領域FDTD法の計算手順

本節では複数領域FDTD法の高速計算化手法を示す．まず通常の複数領域FDTD法における(1)式の具体的な計算方法を示す．(1)式は面積分であるので，この面積分を評価するために仮想閉曲面上のFDTD法で用いているメッシュの数だけ和を求めることになる．FDTD法のメッシュおよび仮想閉曲面のイメージおよび仮想閉曲面上の電界の配置を図4に示す．例えば，仮想閉曲面の大きさをそれぞれの領域で50メッシュ×50メッシュ×6面とすると要素の数は15,000程度となる．これを別の領域に同様の大きさの閉曲面上で計算するとなると，この2乗になり大きな計算量となる．また，この仮想閉曲面上で電磁界を再構成するには，電界および磁界についてそれぞれ面に沿う2方向の成分が必要となる．

図4 仮想閉曲面 s と面上の電界および法線ベクトル

2.2 四分木構造を用いた複数領域 FDTD 法の計算量削減手法

本節では、四分木構造[3][4]を用いた複数領域 FDTD 法の計算量削減手法について述べる。前節で述べたように、複数領域 FDTD 法の計算においては等価定理の面積分を効率よく計算することが重要となる。単純に計算量を減らすことを考えれば、面積分に用いるメッシュのサイズを大きくすることで、面積分自体の計算量を減らすことが出来る。しかし、単純にメッシュサイズを大きくすると電磁界を再構成した際の精度の低下を招くことは容易に想像できる。一方、仮想閉曲面上の電磁界は変化の激しい領域と変化が緩やかな領域がある。この特性に注目した計算量削減手法について述べる。まず、この手法では注目するメッシュと周りのメッシュの電磁界の変化を確認し変化が緩やかであると確認された際は、四分木構造を利用して(1)式的面積分を計算するためのメッシュを仮想的に拡大し面積分を実行する。四分木構造とは注目するセルの周りのセルを正方形になるように拡大していく手法であり画像圧縮などで広く用いられている。画像圧縮では四分木面構造を用いる事で画質をある程度保ったまま圧縮できることが知られている。積分を計算するためのメッシュを仮想的に拡大しているので、拡大したメッシュ上で電磁界の値は各方向成分それぞれ一つとなる。このイメージを図5, 6に示す。

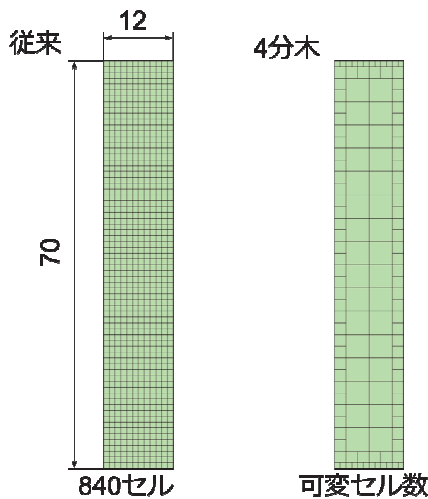


図5 従来手法と提案手法のメッシュ

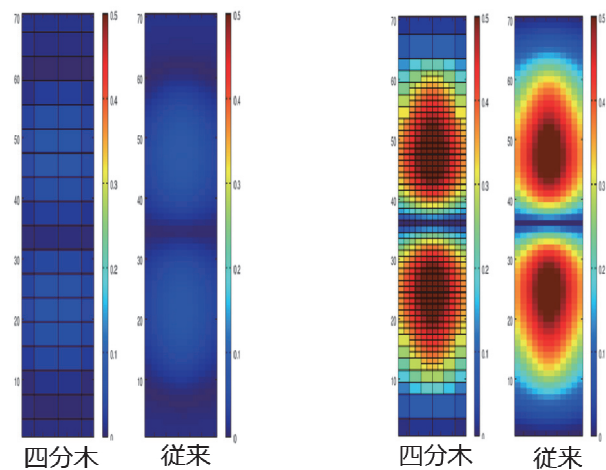


図6 変化が緩い時のメッシュと急な時のメッシュ

図5は、(1)式的面積分を計算するための従来のメッシュと提案手法である四分木構造により仮想的にそれぞれのメッシュを拡大した例を示している。このように、一律にメッシュを拡大するのではなく、ある領域は細かくある領域は粗くなっていることが分かる。また、本提案手法においては、メッシュの拡大基準について、四分木構造内の標準偏差をタイムステップごとに計算し、その標準偏差が事前に設けた基準より小さいければメッシュを拡大し、基準よりも大きい時はそれ以上メッシュを拡大しないとしている。図6に実際にメッシュを拡大した例を示している。こ

のように電磁界の変化が緩くなると仮想的にメッシュを拡大し（図 6 左），逆に変化が急激な時はメッシュサイズは比較的細くなる（図 6 右）。

3. 四分木構造を用いた複数領域 FDTD 法による解析結果

本節では提案手法の有効性を確認するために図 2 に示したモデルと同様のモデルの解析を行った。領域同士の間隔は 300mm とし一つの領域にダイポールアンテナがあり，離れた領域で電界を観測する。(1)式の等価定理を計算するための仮想閉曲面の大きさ，および電界を再構成するための仮想閉曲面の大きさはそれぞれの領域において， $120\text{mm} \times 120\text{mm} \times 300\text{mm}$ および $450\text{mm} \times 450\text{mm} \times 450\text{mm}$ としている。FDTD 法のメッシュサイズはダイポールアンテナがある領域では，各方向にそれぞれ 3mm とし，電界を観測する領域においては各方向にそれぞれ 9mm とした。なお，本計算において電界を観測する領域に散乱体は配置せず真空とした。図 7 に解析結果を示す。

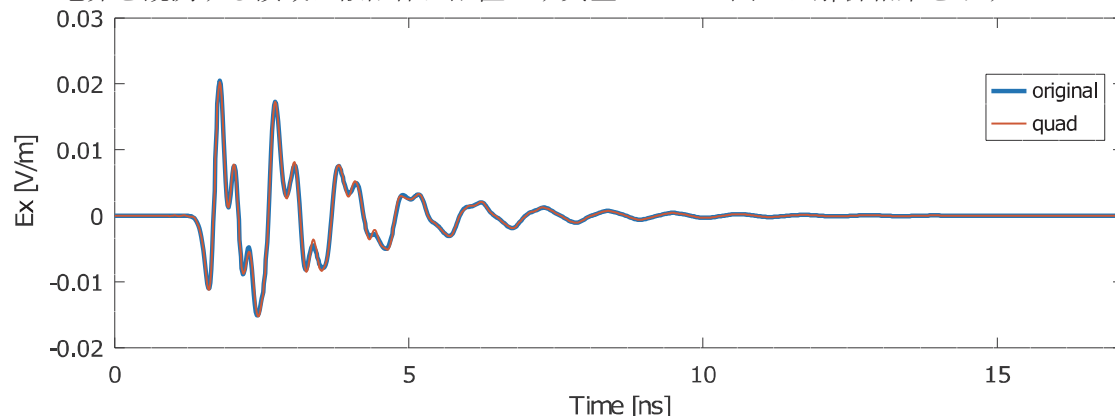


図 7 従来手法と通常の FDTD 法の結果

図 7 に示すように提案手法と通常の FDTD 法を用いた結果はよく一致しており精度が高いことが分かる。計算時間であるが，通常の複数領域 FDTD 法は東北大学設置の SX-ACE 1 ノードを用いて約 28 分必要なのに対し，提案手法を用いた際は約半分の約 15 分で計算が終わっている。以上より提案手法を用いると精度をほぼそのままに計算時間を半減できることが分かった。

4. まとめ

本研究では，複数領域 FDTD 法においてその計算時間が多く必要である問題に対し計算量削減手法を示した。この手法は，電磁界の急激に変化する領域と比較的変化が緩やかな領域に分けて，面積分を計算するための仮想的なメッシュの大きさを拡大する方法であった。このメッシュの拡大には，四分木構造の考え方を利用し，電磁界の変化が緩やかな領域にメッシュを大きく改題した。計算結果より，提案手法を用いる事で精度をほぼそのままに計算時間を半減できることが分かった。本手法は，FDTD 法の様々な問題に活用できると考える。

謝辞

本研究は，東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。また，研究にあたっては同センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただいた。ここに謝意を示す。

参考文献

- [1] 宇野亨, 何一偉, 有馬卓司, 数値電磁界解析のための FDTD 法, コロナ社, 2016
- [2] J. M. Johnson, Y. Rahmat-Samii, MR/FDTD: A Multiple-Region Finite-Difference

- Time-Domain Method, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 14, no. 2, pp. 101-105, February 1997
- [3] R. A. Finkel and J. L. Bentley, Quad trees a data structure for retrieval on composite keys," Acta Informatica, vol. 4, pp. 1-9, 1974/03/01 1974
- [4] G. J. Sullivan and R. L. Baker, Efficient quadtree coding of images and video, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 3, no. 3, pp. 327-331, May 1994