

## [共同研究成果]

## リカレントニューラルネットワークによる 実世界流れ場解析用時間発展計算モデルの探求

松岡 浩・菊池 範子

技術士事務所A I コンピューティングラボ

筆者らは、東北大学サイバーサイエンスセンターの共同研究公募制度により、平成30年度から「リカレントニューラルネットワークによる高解像度流体解析コードの開発」を行っている。本研究の最終目標は、①現実世界の不完全な計測情報でも実時間でシミュレーションに反映できるデータ同化、②高解像度な流体場の時間発展計算も1格子点1ビット幅で実行する超並列ビット演算、③ミニマルファブでも製造可能なLSIを利用した低消費電力エッジコンピューティング、という3つの機能をもった高解像度な流体解析コードの開発にある。本稿では、平成30年度以降に行った研究のうち、上記①の機能を実現するための前提になる“実世界流れ場の時間発展計算モデル”の試案を示すとともに、粒子間力を考慮した試計算を行い、粘性制御の可能性を示した。

### 1. はじめに

#### (1) 高解像度な物理シミュレーションによる社会貢献

近年におけるコンピュータ性能の著しい向上は、ますます高解像度な物理シミュレーションの実現を可能にした。この結果、数値シミュレーションの予測精度が向上し、今では、安全・安心な未来社会の構築、産業競争力の強化など極めて重要な分野での社会貢献が期待されている。

以下に、流体シミュレーション分野における社会貢献の例をいくつか示す。

- ①地球温暖化、異常気象、自然災害などを事前予測し身を守る。(災害に強い都市・港湾計画等)
- ②火力、原子力などのエネルギーシステムを長期安定に動かす。(タービンの中の熱流動設計等)
- ③航空機、自動車などの輸送手段に対し高い安全性を確保する。(非定常進行時等の空力解析等)
- ④船舶輸送、風力発電システムなどの経済性・耐環境性を高める。(プロペラの強度・騒音評価等)
- ⑤循環器系などの手術でより信頼性の高い医療技術を確立する。(動脈瘤手術の血流解析評価等)

一般に、コンピュータによる物理シミュレーションでは、解析したい現象の時間変化を支配する物理場の方程式を設定し、これを離散化して数値計算によって近似解を求める。注目している現象に影響を与える支配方程式をもれなく考慮するほど、また、離散化を細かく行うほど、シミュレーションの信頼性は向上する。この“マルチフィジクス化”及び“マルチスケール化”を可能にする一番の原動力が、大容量で超高速な計算を実行できるスーパーコンピュータの開発とその利用である。実際、これまでこの歴史が繰り返され、多大な成果を挙げてきた。

#### (2) リアルワールド問題への対応

高解像度な物理シミュレーションは、上述のとおり人類社会に重要な貢献を成しうるものであるが、その恩恵を現実世界に展開しようとするとき、コンピュータの性能向上だけでは解決できない問題がある。いわゆる“リアルワールド問題”である。通常の高解像度な物理シミュレーションでは、支配方程式を解いて時間発展計算を行う過程において未来の境界条件等の知識が必要になる。しかし、現実世界における境界条件等には、予期せぬ変動が頻繁に発生するため、その値を前もって知ることができない。従って、我々にできることと言えば、「現実世界の複雑で時々刻々変化する状況に対応して、適切な頻度で現実世界の計測を繰り返し、その計測データに基づいて、時間発展計算値を得る数値シミュレーションの仕組みを迅速に補正し続けること」であろう。また、この“補正操作の繰り返し”(←“実時間計測融合”あるいは“実時間データ同化”という言葉で表現しても良い。)に当たっては、「現実世界から得られる計測情報は、計測システム

設置上の制約や故障の発生などにより、すべての境界における完全なデータ取得は通常不可能であり、かつ、誤ったデータを含みうることに注意を払う必要がある。そして、この“補正操作を含む時間発展計算”は、高解像度で多数の格子点を扱う場合ほど極めて超高速に実行する必要があり、最終的には、計測現場でのエッジコンピューティングによるコンパクトな実現が望まれることになるであろう。

### (3) 本研究の最終目標

以上の考察から、筆者らは、本研究の最終目標を、次の3機能を実現できる高解像度な流体シミュレーションコードの開発であるとした。

- ① 現実世界の不完全な計測情報でも実時間でシミュレーションに反映できるデータ同化
- ② 高解像度な流れ場の時間発展計算も1格子点1ビット幅で実行する超並列ビット演算
- ③ ミニマルファブでも製造可能なLSIを利用した低消費電力エッジコンピューティング

上記②の機能:「1格子点1ビット幅の時間発展計算」は、格子点演算に関する究極の超並列演算を実現するものである。例えば、ベクトル型スーパーコンピュータ SX-ACE を用いてベクトル長が 256words (1word=64bits) になる計算をする場合、1個のベクトルプロセッサコアあたり、1回のベクトル命令で、 $64 \times 256 = 16384$  個の格子点に係る演算を並列実行できることになる。

上記③の機能:「ミニマルファブ製造可能なLSIによるエッジコンピューティング」については、②の要請の結果、各格子点に関する状態量を1ビット幅で表現できるので、その時間発展計算は、ビット演算 (and, or, not, shift 等) のみで実行できることになる。従って、プロセッサコアの演算回路には、ビット演算回路に比べて桁違いに多数のトランジスタ数が必要になる乗除演算回路等を使用しなくて済む。“計測データに基づく補正操作を含む時間発展計算”だけを計測現場に近いエッジコンピューティングで行うことにすれば、その部分のプロセッサは、集積度の高いLSI生産には向いていないミニマルファブでも製造可能になる。今後のIoT(Internet of Things)が普及した未来社会の姿を考える時、少量多品種の国内生産が可能なミニマルファブ製造を利用できることのメリットは大きい。なお、演算回路におけるトランジスタ数や消費電力の削減については、東北大学電気通信研究所等で従来から研究開発が進められている不揮発性演算回路等の実用化で飛躍的に進むと予想される。

上記①の機能:「不完全な計測情報による実時間データ同化」が、本研究の当面の中心課題である。この機能を実現するには、ニューラルネットワークの計算原理がヒントになる。ニューラルネットワークは、入力信号の一部が欠落したり、間違っていたりしても、それなりに適切な答えを出力することができる。この特徴は、「計測システムを設置できない場所の物理場情報の欠落や、計測システムの故障等による間違った物理場情報の混在が一部にあったとしても、それなりに適切なシミュレーション結果を出力し続けることができる」という可能性に繋がる。

このため、本稿では、本研究の初年度である平成30年度以降に行った研究のうち、上記①の機能を実現するための前提になる「“実世界流れ場のための時間発展計算モデル”のニューラルネットワークによる記述」について述べる。なお、本稿の本文は松岡が執筆し、掲載した数値シミュレーション事例に関する計算及び可視化は菊池が分担した。

## 2. ニューラルネットワーク内蔵格子による流れ場の理解

ここでは、ニューラルネットワークとして代表的な“多層パーセプトロン”をとりあげ、物理空間中に規則正しく配置された格子点位置において、各格子点が“多層パーセプトロン”を内蔵していると考えられる。

各格子点には、いろいろな近傍格子点から“仮想粒子”が到着する可能性があり、その存否情報(←例えば、到着粒子が存在する場合「1」、存在しない場合「-1」、不明の場合「0」とする。)が“多層パーセプトロン”の入力層に入力される。そして、ニューラルネットによって計算された出力層における存否情報に従って、その格子点からいくつかの“仮想粒子”がそれぞれの行き

先の格子点に向かって出発する。“仮想粒子”は、一定の質量・運動量・エネルギーをもっている。空間中のある場所で観測されるべきマクロな物理量は、その場所を中心とした適当な近傍に存在する仮想粒子がもつ質量・運動量・エネルギーの総和から導出する。従って、現実世界のいくつかの空間位置で計測データが得られれば、対応するそれぞれの位置の近傍格子点に内蔵された“多層パーセプトロン”を誤差逆伝播法により学習させて、当該計測データを出力するように調整することができる。ただし、多層パーセプトロンの入力データに対する重みの値は、例えば「1」「-1」「0」のいずれかの値を適用するものとし、学習によって調整するものは、それらの重みの適用頻度(適用確率)である。このようにして、計測データが、断片的な時空間位置に関するものしか得られないような現実世界の環境下でも、シミュレーション計算の出力が統計平均的に計測データに整合するよう自動調整することができる。

以上のように、1格子点における時間発展計算は、データ同化の計算も含めて“多層パーセプトロン内蔵格子”の計算で実行できると考えられる。従って、仮想粒子が移動する可能性のある格子点どうしを全て結べば、“流れ場全体”もニューラルネットワークで表現でき、その時間発展計算を実行できる。すなわち、“流れ場”の変化は、“ニューラルネットワーク(多層パーセプトロン)を内蔵した空間格子”とその格子点(ニューロン)間を移動する“仮想粒子”の集団挙動として理解できる。この階層構造をマクロな側から要素分割していくイメージで図1～図4に示す。

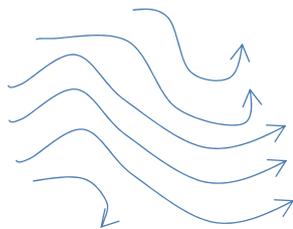


図1 流れ場の連続体理解

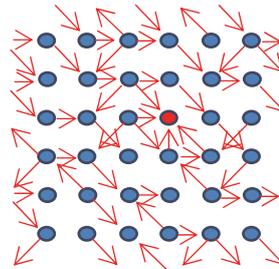


図2 流れ場の仮想粒子挙動による理解

(図2から1格子点の近傍だけ  
を取りだしたのが図3)

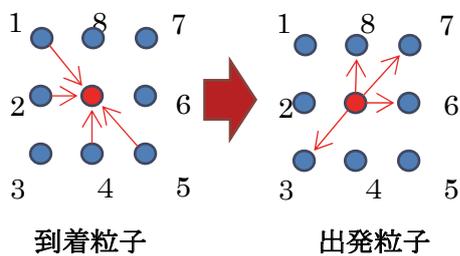


図3 1格子点における到着粒子と出発粒子

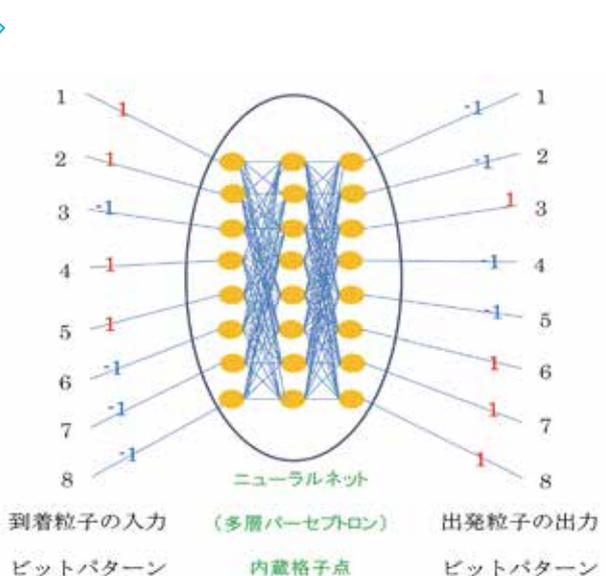


図4 “多層パーセプトロン”を内蔵した格子点

### 3. リカレントニューラルネットワークによる実世界流れ場の時間発展計算モデル

第2章で述べたように、流れ場全体の時間変化は、“ニューラルネットワーク(多層パーセプトロン)を内蔵した空間格子”とその格子点(ニューロン)間を移動する“仮想粒子”の集団挙動として理解できる。ここでは、具体的な“実世界流れ場の時間発展計算モデル”の1例として、**図5**に示すような「複数の多層パーセプトロン(階層型 NN)による計算構造の組合せ」を提案する。

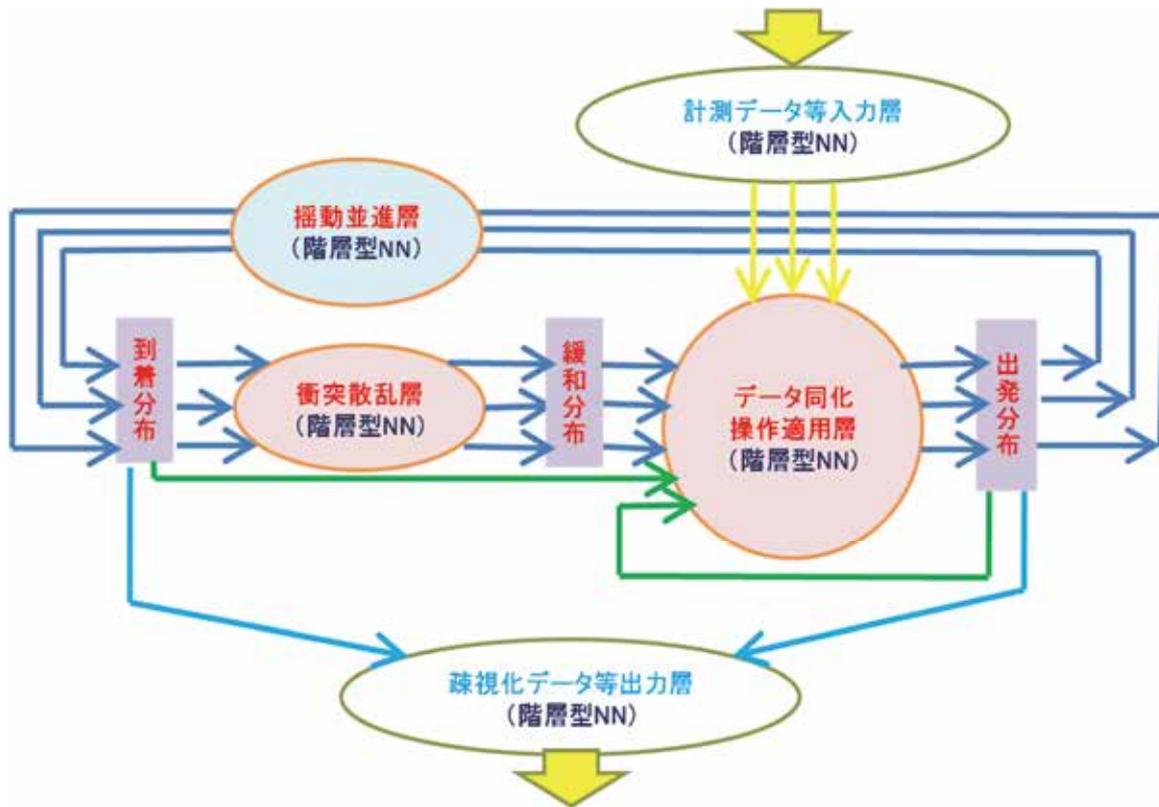


図5 リカレントニューラルネットワークによる実世界流れ場の時間発展計算モデル

各格子点に到着した仮想粒子群は、「衝突散乱層」において質量・運動量・エネルギーが保存される等方性の衝突散乱計算がなされる。その結果、到着粒子の速度分布がもっていた異方性が緩和された速度分布(“緩和分布”)をもつ仮想粒子群が得られる。これらの仮想粒子群は、現実世界の計測情報と整合性をとらせるための“データ同化操作”を適用する「データ同化操作適用層」に入力される。この層では、今入力された現在の時刻ステップの緩和分布に対して、①「計測データ等入力層」から得られる計測情報、②1時刻ステップ前の到着分布情報、③1時刻前の出発分布情報の3つの情報をもとにして、“データ同化操作”を確率的に適用する。その後、これらの仮想粒子群は、当該格子点の近傍から、それぞれの仮想粒子が行きつくべき格子点に向けて移動する。この移動にともなう仮想粒子の存否情報の書き換え操作を行うのが「揺動並進層」である。この層の操作によって、各仮想粒子は、それぞれの行き先格子点に到着し、1回の計算サイクルを完了する。この計算サイクルを、シミュレーションの時刻ステップの進行に合わせて多数回繰り返すことによって時間発展計算が継続することになる(図5の青矢印の部分)。

また、外部に対する可視化等のスナップショット出力については、時刻ステップ数がある一定の数だけ進むたびに、「疎視化データ等出力層」において仮想粒子の到着分布と出発分布の平均分布を個々の疎視化領域の範囲内で求めて出力する(図5の空色矢印の部分)。

上述のとおり、1回の計算サイクルの過程の中で、「1時刻ステップ前の到着分布情報と出発分布情報」を記憶しておき、現在の時刻ステップにおける“データ同化操作の適用確率”の導出計算にフィードバックをかける仕組みにしている（図5の緑色矢印の部分）。従って、ニューラルネットワークの種類としては、“リカレントニューラルネットワーク”による計算モデルということになる。

#### 4. 仮想粒子の格子点間移動における“揺動並進”の仮定

ある格子点から出発した速度 $\vec{V}$ をもつ仮想粒子は、時刻ステップ間隔 $\Delta\tau$ の時間が経過した後は、 $\vec{V}\Delta\tau$ だけ離れた位置にある格子点に移動すると考えるのがふつうである。しかし、ここでは、粒子間力の影響も考慮できるように、「速度 $\vec{V}$ をもってある格子点を出発した仮想粒子は、速度 $\vec{V}$ の向きに直線的に前進するのではなく、速度 $\vec{V}$ と垂直な方向に揺動しつつ、速度 $\vec{V}$ の延長線上にはない左右の格子点をジグザグ型に寄り道しながら、平均的には速度 $\vec{V}$ で前進する」と仮定した。図6に、2次元平面上を揺動並進する仮想粒子のイメージを示した。

図6において、各格子点(例えば、黄色格子点)には、速度 $\vec{V}$ をもつ仮想粒子が、左後方の格子点と右後方の格子点から到着する。図6の黄色格子点には、左後方から緑色の速度ベクトルをもつ仮想粒子が到着し、右後方から茶色の速度ベクトルをもつ仮想粒子が到着している。到着したそれぞれの仮想粒子は、当該格子点上で、他の速度をもつ仮想粒子と衝突散乱を起こし、速度の向きを変える。この衝突散乱後に、たまたま速度 $\vec{V}$ をもつことになった仮想粒子が、左前方の格子点と右前方の格子点に向かって出発することになる。

この状況を古典力学的に解釈すれば、「速度 $\vec{V}$ をもつ仮想粒子に対して、速度 $\vec{V}$ に垂直な方向に同じ大きさで逆向きの揺動力ペアが時間差をもって作用したため、仮想粒子が速度を変えずに“斜め移動”した。」ということになる。そして、この“斜め移動”が左右等確率で繰り返された場合にジグザグ型の移動パスが実現すると考える。

このモデルを仮定することにより、本来は、お互いに平行で左右に少し離れたそれぞれの直進パスを進行するはずであった速度 $\vec{V}$ をもつ仮想粒子が、ジグザグパスを進行することによって、ときどき、ある格子点上で非常に接近することになる。

このとき、仮想粒子間に分子間力を模擬した引力が働くと仮定する。左後方から到着する仮想粒子と左前方に出発する仮想粒子は、当該格子点近傍において、正味左向きの揺動力を発生するであろう。同様に、右後方から到着する仮想粒子と右前方に出発する仮想粒子は、当該格子点近傍において正味右向きの揺動力を発生するであろう。従って、後方から到着し前方に出発する仮想粒子の数について左右のバランスが崩れている場合は、当該格子点における仮想粒子の揺動は左右等確率にはならないと思われる。このわずかな確率の差が、結果として、自己組織化される流体のマクロな挙動に大きな変化をもたらす可能性は十分ありうると考えられる。ただし、これは、モデルの仮定の意味を極めて簡単に説明したに過ぎず、実際はもっと複雑である [1]。

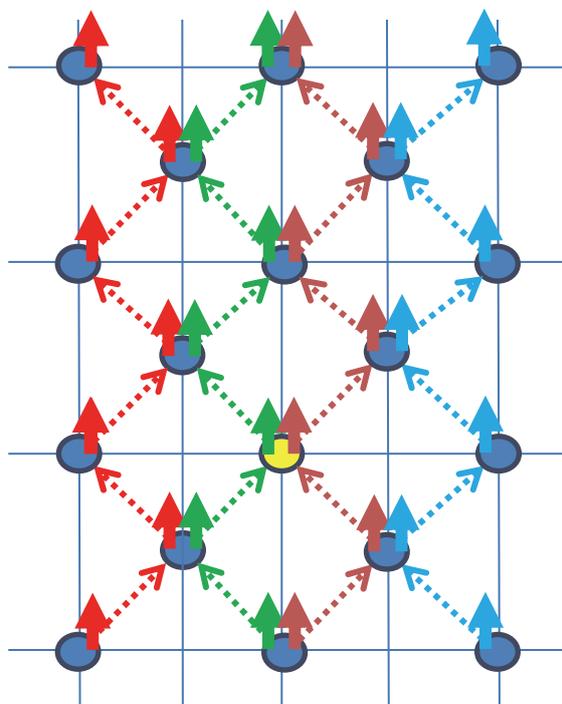


図6 上向き太矢印で示す速度 $\vec{V}$ をもつ  
仮想粒子群が揺動並進する様子

## 5. 粒子間力を考慮した流体シミュレーションに関する考察

(1) 粒子間力を考慮した仮想粒子に対する個別操作で負粘性を発現できる可能性

第3章に述べた“リカレントニューラルネットワークによる実世界流れ場の時間発展計算モデル”を利用して、第4章に述べた“揺動並進”の仮定を行い、粒子間力を考慮するシミュレーション計算を試みた。具体的には、次の操作によって“粒子間力”を考慮する。

### 操作A：

前回の時刻ステップにおける仮想粒子の衝突散乱において「左後方から到着した粒子数と左前方に出発した粒子数の和」が「右後方から到着した粒子数と右前方に出発した粒子数の和」よりも大きい場合」で、かつ、今回の時刻ステップにおける仮想粒子の衝突散乱において「左後方から到着した粒子が存在し、右後方から到着した粒子が存在しないで、右前方のみに粒子が出発しようとしていた場合」は、右前方に出発しようとしていた粒子を左前方に出発させる。

### 操作B：

上記**操作A**の文章で、「左」と「右」を入れ替えた操作を行う。

ここで2つの仮定をする。

[仮定1] 時刻刻みが1時刻ステップ間隔だけ進む間に、それぞれの仮想粒子が“斜め移動”するとしても、疎視化して得られるマクロな流体挙動はほとんど変化しない。

[仮定2] マクロな流速が速い場所では、マクロな流速と同じ向きに進む仮想粒子の存在確率が高くなり、マクロな流速と逆向きに進む仮想粒子の存在確率は低くなる。

すると、1時刻ステップ前において「左後方から到着した粒子数と左前方に出発した粒子数の和」が「右後方から到着した粒子数と右前方に出発した粒子数の和」よりも大きい場合」という事実は、「現在においても、その格子点を境にして、左側を前方に進むマクロな流速が、右側を前方に進むマクロな流速よりも大きいであろう。」という推測を可能にする。そして、このとき、格子点近傍における正味の粒子間力が左側を向くことから上記の**操作A**が発動されれば、左側を前方に進むマクロな流速は、右側を前方に進むマクロな流速に対してさらに加速され、速度勾配が急になるであろう。「左」と「右」を入れ替えた場合には、上記の**操作B**が発動されることになり、はじめの速度勾配はやはり急になる。従って、**操作A**と**操作B**は、ある場所にマクロな速度勾配が存在したとき、その勾配を急にする効果があり、“負の粘性を発現させる操作”であると考えることができる。何の操作も適用しない場合に流体は正の粘性を発現するので、この操作をある適当な頻度(確率)で適用すると、正ではあるがその値がゼロに非常に近い流体粘性を発現できると思われる。これによって高レイノルズ数の流体シミュレーションを容易に実行できる道が開ける。

(2) 負粘性発現操作がマクロな流体挙動に及ぼす影響の定性的な確認

個々の仮想粒子に対する個別操作である上記の**操作A**と**操作B**が、疎視化したマクロな流体スケールにおいて、負粘性の効果を発現させ、その結果、高レイノルズ数領域で出現するであろう流体挙動が得られることを確認する。

このため、筆者らの経験が深い円柱後流のシミュレーション[2, 3, 4]を実行し、その効果を確認した。具体的には、3次元空間が静止流体で満たされ、その中に無限の長さをもつ円柱が存在していたとする。時刻ステップゼロにおいて、円柱軸に垂直な方向に流体が動きはじめた場合、円柱の後流がどのような挙動を示すかを調べる。より具体的には、円柱軸と平行にZ軸をとり、流体が動き出す向きに+X軸をとる。Y軸は、X軸にもZ軸にも垂直であるから、結果的に円柱断面のある直径と平行な方向になる。また、ここでは、“4次元面心超立方体格子(FCHC)モデル”

[5, 6, 7]を用いるので、その位置を特定するには、通常の3次元位置座標 (X, Y, Z) に加えて第4次元目の位置座標 (R) が必要になる。3次元位置座標 (X, Y, Z) が変化する範囲は、現実には流体が存在する3次元空間中の位置に対応して定まるが、R 座標については複数の位置座標値をもてばよく、現実には流体が存在する位置の広がりからは何の制約も受けない。このため、ここでは最も簡単に、R の位置座標値は2個の値 ( $\pm \ell/2$ ) のみをとるものとする。ここで、 $\ell (>0)$  は、シミュレーションの時間発展計算において時刻ステップがひとつ刻まれる時間を  $\Delta \tau$  とすれば、 $\ell = c \Delta \tau$  で与えられる。ここで、 $c$  は、仮想粒子の1座標軸方向の速さである。

また、今回おこなったシミュレーション計算における格子点配列は、X方向に768個、Y方向に512個、Z方向に256個で約1億個の規模に対応している。疎視化については、スナップショットをとるべき時刻ステップがやってくるたびに、XYZ方向に  $8 \times 8 \times 8$  個並ぶ512個の格子点をひと塊にしてその中に存在する仮想粒子の運動量の合計を求め、 $96 \times 64 \times 32$  個の流速ベクトルを導出した。ただし、3次元ベクトルは紙面上で表現しにくいいため、後述するシミュレーション結果は、Z軸に垂直なある平断面上における流速ベクトル分布の時間変化を示すこととした。

なお、今回のシミュレーション計算では、マクロな流体挙動の変化をおおざっぱに確認することが目的であり、定量的な厳密性は追求しない。このため、仮想粒子がもちうる速度としては、もっとも単純なFCHCモデルである“**単速さ 24 速度モデル**”を採用した。このモデルでは、仮想粒子は次の24種類の4次元速度をもつことができる。

( $\pm c, \pm c, 0, 0$ )、( $\pm c, 0, \pm c, 0$ )、( $\pm c, 0, 0, \pm c$ )、( $0, \pm c, \pm c, 0$ )、( $0, \pm c, 0, \pm c$ )、( $0, 0, \pm c, \pm c$ )

仮想粒子は4次元空間内を動くのでその速度成分は4つあり、仮想粒子の速さは、すべて同じで大きさを、 $\sqrt{(\pm c)^2 + (\pm c)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2} c$  である。(c: 基準となる仮想粒子の速さ)

時間発展計算を開始する時刻ステップ0の時点で、各サイトには、そこに存在できる仮想粒子の最大数の20%の数の仮想粒子がランダムな向きに配置されていると仮定した。この結果、疎視化して得られるマクロな流速はゼロであり、流体は、直方体形状の中で静止している。次に、時刻ステップ1の時点から、+X向きの速度をもつ仮想粒子を  $X=0$  の位置から注入していく。すると、時刻ステップが進むにつれて、流体全体が+X向きのマクロな速度をもつようになる。このとき、+X側の先にある直方体出口においては、出口直前に存在するサイト上の仮想粒子配置を、出口直後に存在するサイトの仮想粒子配置にコピーして、出口におけるマクロな流速の勾配がゼロになるという境界条件を近似的に実現した。また、 $\pm Y$ 方向と $\pm Z$ 方向には、周期的境界条件を適用した。そして、この流れの中の入りに近い位置に、“Z方向の中心軸をもつ無限大の長さの円柱”を置き、その後流に生じる流体挙動を計算した。なお、これらの計算は、東北大学サイバーサイエンスセンターのSX-ACE32 ノード(128ベクトルコア)を利用して行い、どのケースも約39000時刻ステップの計算を約40分で実行している。

### (3) シミュレーション結果の考察

図7及び8に前述の操作A及びBの適用確率を0、1/300、1/200、1/180の4ケース変えた場合のシミュレーション結果を示す。スナップショットは、3次元的に生じている円柱後流の流速変化のうち、Z軸に垂直なある平断面上における流速ベクトルの時間変化を示している。はじめ静止していた流体中におかれた円柱の後流には、流体の速度が増すにつれていろいろな変化が生じる。ここでは、紙面の都合から、こうした変化が十分に成熟した段階の同じタイミングにおけるスナップショットの比較だけを示す。なお、スナップショットの流速ベクトルの色は、赤色なら高速、黄色なら中速、緑色なら低速、青色なら静止～超低速であることを表している。

“操作A及びBの適用確率”をゼロから上げていくと、1/300 まではゼロの場合とほとんど差異はなくその後の変化もない。1/200 の場合は、双子渦からカルマン渦への過渡変化が生じている。1/180 の場合になると、早期に多様な過渡変化が発生する。このように、非常に小さな適用確率の変化であっても、円柱後流の挙動に大きな影響を与え、流体粘性を変化させているように見える。今後、さらにいろいろな操作を考案し、定量的かつ理論的な検討を進めていきたい。

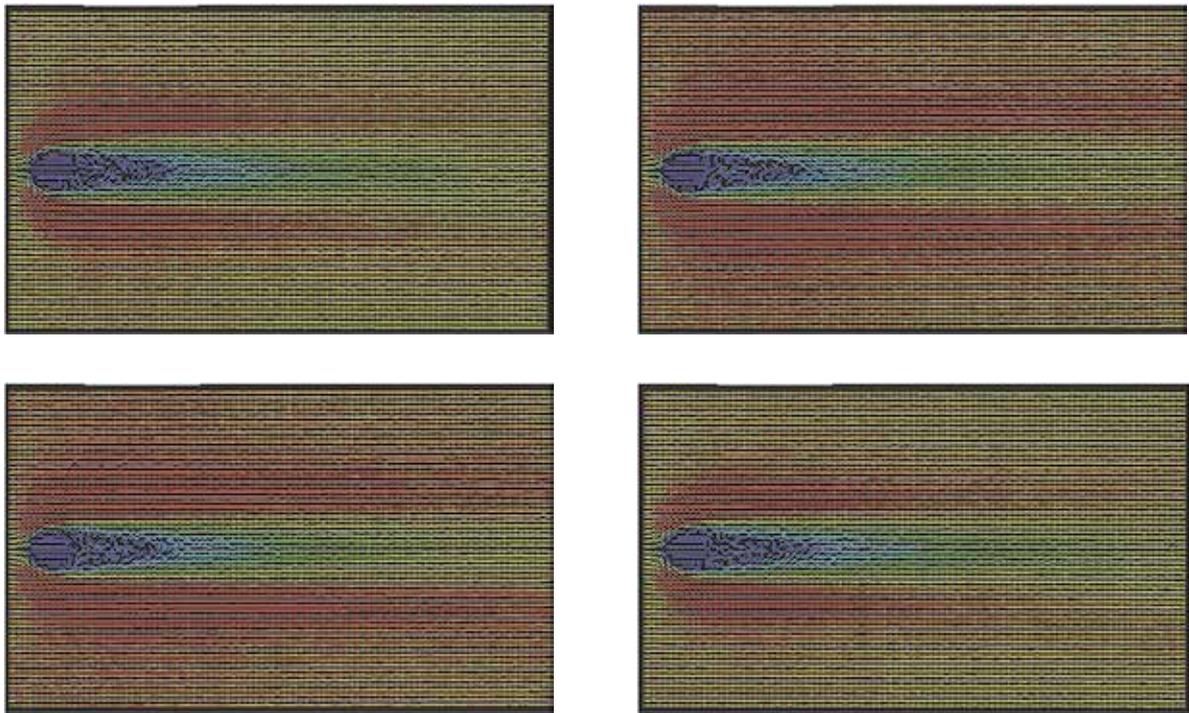


図7 粒子間力を考慮した円柱後流のシミュレーション結果（適用確率=左 0, 右 1/300）  
（上段が 34816 時刻ステップ、下段が 36864 時刻ステップにおけるスナップショット）

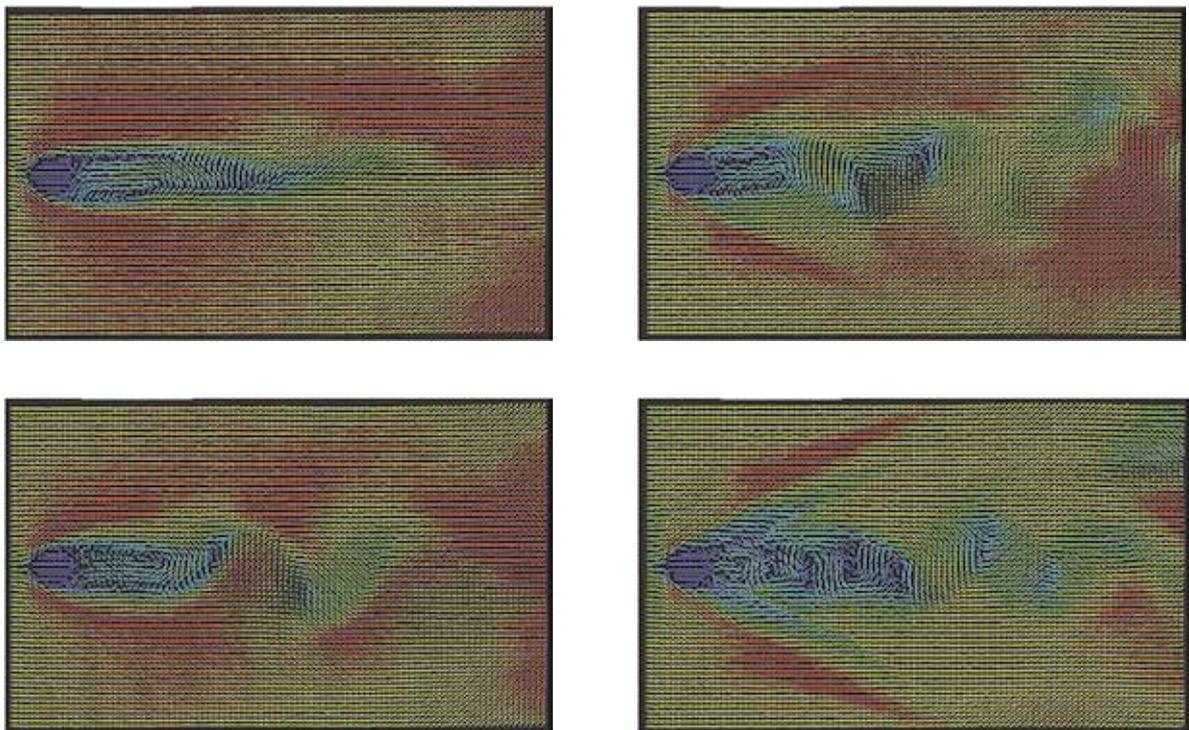


図8 粒子間力を考慮した円柱後流のシミュレーション結果（適用確率=左 1/200, 右 1/180）  
（上段が 34816 時刻ステップ、下段が 36864 時刻ステップにおけるスナップショット）

## 謝辞

本稿で述べた共同研究課題は、「高解像度流体シミュレーションにAI計算原理のひとつであるニューラルネットワークの計算手法を取り入れ、境界条件等を漏れなく知ることができない環境下であっても部分的に得られた計測データを活用してそれなりに適切なシミュレーション計算を実行できることを示し、高解像度シミュレーションの実世界への適用性を拡大する」ことを目指している。初年度は、新しい計算モデルに関するいろいろなアイデアを試す初期段階であった。この時期に、個々の計算モデルを試すたびに計算コードのチューニングに多くの時間をさくことは非効率的で悩ましい。この点、東北大学サイバーサイエンスセンターのベクトル型スーパーコンピュータ SX-ACE は、特別なチューニングをしないでも十分な計算速度を確保することができ、非常に助かった。また、利用にあたっては同センター関係各位のご親切なご指導とご協力をいただき、心から感謝する次第である。今後とも同センターの有意義な活動を継続的に発展させられることを期待する。

## 参考文献

- [1]小原, “一伝熱の常識と非常識—「拡散項3兄弟」を考える”, 伝熱 2001年1月, pp. 38-43, 2001
- [2]松岡, 菊池, “仮想粒子の並進移動過程に干渉効果を加味した流体解析の可能性”, SENAC Vol. 52 No2, pp. 18-27, 2019
- [3]松岡, 菊池, “コンパクトな計算機によるリアルタイム流体解析の実現に向けて”, SENAC Vol. 51 No2, pp. 1-10, 2018
- [4]松岡, 菊池, “多速さ格子ガス法実用化展開への手がかかり”, SENAC Vol. 49 No. 4, pp. 1-15, 2016
- [5] Uriel Frisch, Dominique d’Humières, Brosl Hasslacher, Pierre Lallemand, Yves Pomeau, Jean-Pierre Rivet, “Lattice Gas Hydrodynamics in Two and Three Dimensions”, Complex Systems, 1 (1987), pp. 649-707, 1987
- [6] Chistopher M. Teixeira, “Continuum Limit of Lattice Gas Fluid Dynamics”, MIT, 1993
- [7]松岡, “ビット演算によるCFDと等価な高精度流体解析手法”, RIST News No. 64, pp. 17-28, 2018