

[共同研究成果]

直接数値解析による平面ポアズイユ流の乱流縞形成の研究

— 壁乱流亜臨界遷移の解明に向けて —

塚原 隆裕 ・ 猪岡 翔

東京理科大学 理工学部 機械工学科

円管内や平行平板間などの壁乱流に見られる亜臨界遷移, そのメカニズムと普遍則の解明には, 理論的アプローチが困難で, 従来は風洞や水路実験に頼ってきた. 近年の大型ベクトル並列計算機(東北大学サイバーサイエンスセンター保有のSX-ACE等)の発展により, 直接数値解析(DNS)によるアプローチが, いま可能となってきた. 本研究では, 圧力勾配駆動の平行平板間流を対象にして, 乱流維持限界に近い遷移レイノルズ数域で観察される局在乱流構造に着目することで, 乱流が維持し得る下臨界レイノルズ数の特定を目指している. 特に, 乱流斑点から乱流帯への成長過程をDNSで調査することで, 局所攪乱に対する下臨界レイノルズ数を検討している.

1. 緒言

我々を取り巻く空気や水の流れ, 体内の血液流れ, 各種プラントや熱交換器における熱輸送媒体・冷却材といった産業界に見る流れ..., 例を挙げれば枚挙に暇がないほどに多種多様な流体现象で世の中は溢れている. それら流動現象は千差万別であり, 近年の“ものづくり”では模型風洞実験に先立ち, CFD(数値流体力学)シミュレーションによりおおよその設計指針を立てることで, 流れの理解・予測・制御の効率化を図っている. CFD解析の汎用化は, コンピュータの高性能化とCG技術の進歩によるところが大きく, 今後も益々, CFDの担う役割・場面は増加するものと考えられる. 流れ予測を困難にする要因の一つが乱流遷移である. 流れの状態は大別して, 層流と乱流があり, 前者では流れの時空間的变化が規則的または緩やかであり予測も比較的容易である. しかし, 身の回りや産業界に見る流れは, もう一方の乱流状態であることが多く, 非定常で広範な渦スケールを伴う複雑な流動状態を呈する. 一般的に, 微細な乱流構造が流体をかき乱すことで, 運動量・熱・物質の混合が強められ, 結果的に壁面摩擦・熱伝達・物質拡散が層流に比べて桁違いに促進される. そのため, 注目する流れが層流と乱流のいずれであるかを予測し, 熱流動特性などを見積もることは工学的に重要である. よって, 乱流の発生条件または維持限界を事前に知る必要があり, 先ず規範的な(カノニカル)流路で乱流遷移の調査を行っていくこととなる. 閉じた流路内のカノニカル流れとして円管内流と平行平板間流がある. これらは主流方向に無限に長く, 流路断面が一定の流れであり, 古くから乱流および遷移現象の研究対象として頻繁に扱われている. 以下に, 一部の先行研究と本研究目的を記す.

Reynolds [1]は染料による円管内流の可視化を行い, 乱流遷移を定量的に調査した. ここで, 乱流発生条件を整理する指標として無次元数(後年, レイノルズ数 Re と呼ばれる)が導入され, このレイノルズ数がある閾値を超えることで層流から乱流に遷移することを見出している. その後, 詳細な調査が行われ, 多段のレイノルズ数の閾値が提案されている[2].

Re_E	これ以下では, 加えた攪乱が単調減衰する
Re_S	これ以下では, 加えた攪乱が過渡的成長し得るが, 最終的に減衰する
Re_T	これ以上では, 自明でない有限だが長時間維持する解が存在する
Re_G	これ以上なら, 乱流が局所的にも維持し得ることができると下臨界値
Re_L	これ以上では, 無限小攪乱に対して基本流が不安定となる上臨界値

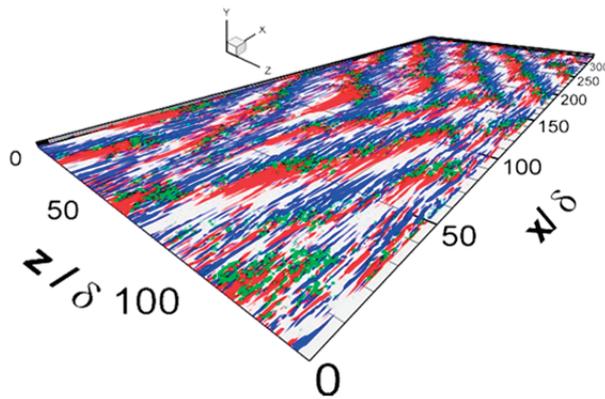


図1 平面ポアズイユ流で発生した縞状の乱流帯。レイノルズ数は $Re = 1170$ で、遷移域内にある。各色の等値面は主流方向速度変動（赤，高速；青，低速）と渦（緑）を可視化している。主流方向は図の左下から右上に向かって。

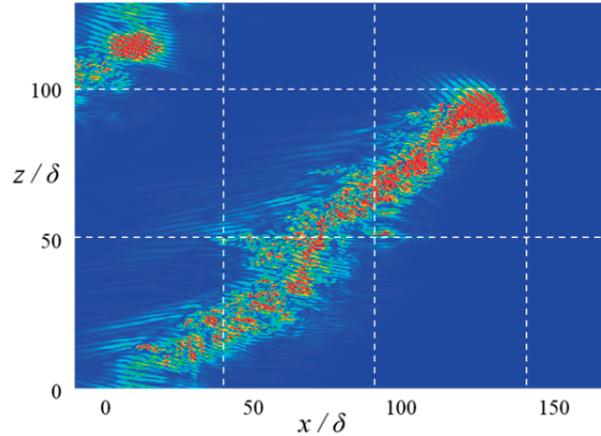


図2 平面ポアズイユ流の $Re = 840$ 付近における乱流帯の観測例。コンターは壁面垂直方向の速度絶対値を示し、赤色がいわゆる局在乱流領域に相当する。計算領域の半分を可視化。

円管内流れでは、線形安定性解析により任意のレイノルズ数において無限小攪乱に対して安定、つまり上臨界値 Re_L は無限大であることが示され[3]、有限攪乱を契機に乱流になる、いわゆる亜臨界遷移を起こす。一般的に、壁乱流の亜臨界遷移過程では、 $Re_E < Re_S$ 、 $Re_G < Re_L$ である。ちなみに本研究対象ではないが、レイリーベナル対流（薬缶の水を沸かす状態に相当するカノニカルな系）などの超臨界遷移では、 $Re_E = Re_S = Re_L$ である。さて、円管内流では $Re_L = \infty$ であり、あらゆるレイノルズ数で安定と言えるが、現実には管流入口や不可避の微小攪乱により亜臨界遷移が引き起こされるため、実用上はあまり問題にならない。一方で、遷移域の下臨界値 Re_G が工学的にも理学的にも興味を湧くところである。Wynanski ら[4]は、強い初期攪乱で現れる時空間的に局在した乱流領域の塊（乱流パフ）を発見し、これの発生限界が $Re_G \approx 2000$ であることを報告している。そして近年、Avila ら[5]は非常に長い円管を用いた実験により、乱流パフが有限の寿命を持つことを見出し、パフが分裂に要する時間と消滅に要する時間が等しくなるレイノルズ数を $Re = 2040 \pm 10$ と決定した。現在では、この値が円管内乱流の下臨界値 Re_G として認識され、この亜臨界遷移のメカニズム解明や物理モデル構築が精力的に行われている[6]。

上記のように、Reynolds の実験から 130 年以上、亜臨界遷移の解明が円管内流について進められてきたが、平行平板間流においても研究が長年に亘り行われている。スパン方向に自由度を有する平行平板間流でも、乱流パフのような局在乱流構造を伴うことが知られており、その形状から初期発達段階では乱流斑点と呼ばれている。乱流斑点は層流場に強い局所攪乱が集中することで発生し、壁面と平行な面で観察すると乱れが集合して楕円状の形をとり流れ場に存在する。平面クエット流（二壁面の相対運動で流れを駆動）において、上臨界値 Re_L は円管内流れ同様、無限大であるが [7]、下臨界値 Re_G は $Re = 325$ 程度と示されてきた[8]（レイノルズ数の定義は円管内流のものとは異なることに注意）。Prigent ら[9]は高レイノルズ数から段階的に下げたときに現れる帯状の局在乱流構造（乱流帯）に着目し、 $Re = 415$ を下回った遷移域で乱流帯が現れることを実験により発見した。同様に、圧力勾配駆動の平面ポアズイユ流においては、乱流斑点が Emmons ら[10]によって初めて観測され、Tsukahara ら[11,12]が DNS（直接数値解析：乱流モデルを用いずに、微細な乱流渦を解像する格子数を用いる高負荷の数値計算手法）で図 1 のような乱流帯が発生することを見出した。その後、水路実験においても乱流帯の存在が実証されている[12,13]。平面ポアズイユ流における上臨界値は Orszag [14]によって線形安定性理論から $Re_L = 5772$ （レイノルズ数の定義は後述）であることが示されている。一方で、下臨界値 Re_G は実験的に $Re = 1000$

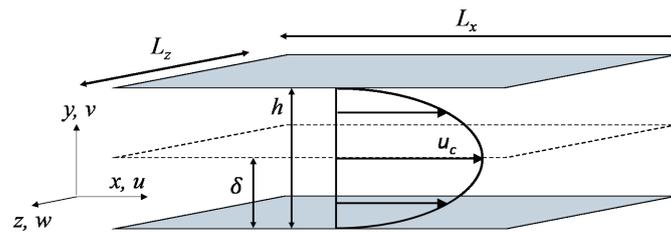


図3 解析対象の平面ポアズイユ流. x 方向に平均圧力勾配 (流量を一定にするため可変) を課して, 流れを駆動している. チャネル幅および半幅をそれぞれ h と δ で表す. 各方向速度成分(u, v, w)の定義も図中に示す.

程度[15,16]とされてきた. しかし, 最近の大規模な DNS [17]により, $Re = 840$ 未満でも, 乱流帯は空間的に局在化して半永久的に維持することが示された. 図2は $Re = 840$ で成長を続ける乱流帯の可視化例であり, 計算領域の大半は乱れの無い層流域であり, 主流方向とスパン方向に対して傾斜した角度に伸びた帯状の乱流領域が確認できる. その帯の空間スケールはチャネル幅 h の数十から百倍にも達し, 前述の実験[15,16]で乱流帯が観測されなかった理由として流路サイズの不足が考えられる. このとき, 乱流帯の不在が, 高めの下臨界値という結果に繋がったと思われる. 2016年に Sano & Tamai [13]が大規模な水路実験を実施し, 彼らも $Re = 840$ 程度まで乱流帯のような局在乱流を観察しており, 平面ポアズイユ流における下臨界値は 1000 未満ではないか, と考えられるようになった. さらに Sano & Tamai [13]は乱流帯のパターン形成と減衰過程から, 亜臨界の層流・乱流が統計力学モデルにおける DP (有向パーコレーション) 転移であることを示唆した. これを契機に, 層流乱流転移の連続性や, 普遍的法則の存在を巡って現在盛んに研究が行われている[18,19].

以上のように, 平面ポアズイユ流 (および平面クエット流) では下臨界値 Re_G を迎える直前, 乱流帯が局在乱流の延命をもたらし, 下臨界値を下げる傾向が見受けられる. ここで, 乱流斑点が乱流帯に成長したら半永久的に局在乱流を維持すると仮定すると, 平面チャネル流では乱流斑点が成長し帯になるか否かが, 下臨界値 Re_G を定める要となる. よって, 乱流斑点から乱流帯への成長・減衰の過程と条件の調査を本研究の目的とする. 解析手法は既報[11]とほぼ同様であるが, 本研究対象では斑点成長に確率的要素が含まれるため, 乱流帯を捉える大規模な計算領域を用いた高負荷 DNS の試行を多数重ねる必要がある. これの実現には, 東北大学サイバーサイエンスセンターの大型並列ベクトル計算機 SX-ACE の利用が不可欠である.

2. 解析対象と支配方程式

解析対象は, 平面ポアズイユ流れ (図3) で, x 方向に一樣な圧力勾配が付加されることで流れは駆動される. 非圧縮性ニュートン流体および物性一定を仮定して, 支配方程式は連続の式とナビエ・ストークス方程式である. 二式のカップリングにはフラクショナルステップ法を, 空間的離散化には有限差分法 (2次中心または4次中心差分) を用いた. 壁に平行な x および z 方向に周期境界条件を課すことで無限平板を想定し, 壁面は滑り無しとしている. 流量一定の条件下で数値時間積分を行うが, 流動状態によっては壁面摩擦抗力が変動するため, 平均圧力勾配を逐一調整している. 計算領域は $L_x \times L_y \times L_z = 51.2h \times h \times 51.2h$ または $102.4h \times h \times 102.4h$ であり, これに応じて格子数も $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 64 \times 256$ または $512 \times 64 \times 512$ と変えている.

初期条件として, 層流場に局所攪乱を与えることで乱流斑点を発生させた場を用いる. 初期攪乱は Henningson ら[20]の方法に倣い, 次式の流れ関数 φ を用いて流れ方向に伸びた渦対を与える (周期境界をかけているため, 任意で場所を選択).

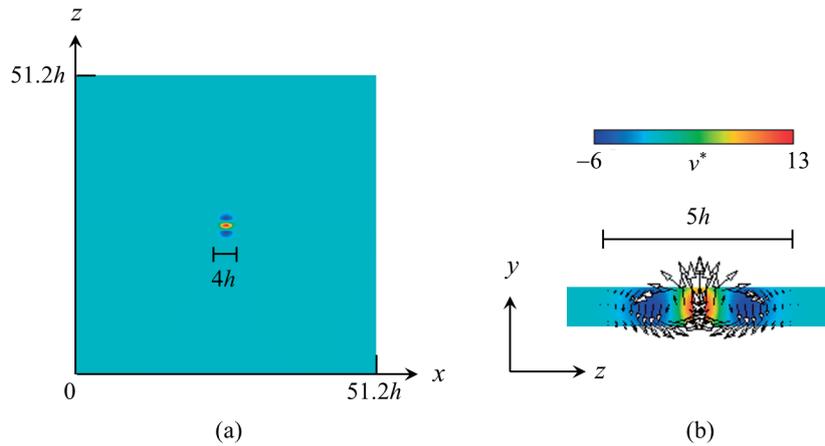


図4 解析対象の初期場 ($A = 13$ の場合) の可視化図: (a) チャンネル中央平面, (b) 初期攪乱の渦対中央を横切る y - z 流路断面の一部. コンターは壁垂直方向速度 v (バルク平均速度 U_{bulk} で無次元化) を, ベクトルは可視化断面内の瞬時速度を示す. h はチャンネル全幅を表す.

$$\varphi = A(1 - y^2)^2 z \cdot \exp(-x^2 - z^2) \quad (1)$$

$$v = \varphi_z \quad (2)$$

$$w = -\varphi_y \quad (3)$$

上式により x - y 面について対称な渦対が与えられる. 図4(a)はチャンネル平面内の初期速度分布を, 図4(b)は z - y 流路断面内で渦を可視化した. 当該攪乱は水平方向に指数関数的な減少をするため, 一对の渦対以外はほぼ強度はゼロである. 空間サイズはスパン方向に約 $5h$, 主流方向に約 $4h$ である. A は渦の強さ, より具体的には壁面垂直方向の最大流速に相当するパラメータである.

3. SX-ACE における計算性能

前述の計算条件とは異なる (格子数 $N_x \times N_y \times N_z = 1024 \times 64 \times 512$) が, 同一コードによる DNS を東北大学サイバーサイエンスセンターの SX-ACE にて実行し, その際のプログラム性能を抜粋して表1に示す. 当該計算は, ノード内 OpenMP 並列化を施したコードでの検証であり, 使用した CPU メモリは 63.4GB である.

ベクトル並列計算機である SX-ACE 上でのプログラム性能と比較するため, 下記仕様のワークステーションで同一コード (但し, ここでも格子点数は異なり, 上記の4倍の $2048 \times 64 \times 1024$ で, CPU メモリは約 250GB) にて実行した.

CPU: Intel Xeon E5-2690v2, 3.0 GHz, 10 core, cache 25M×2

Memory: ACTICA DDR3 1600, ECC REG, 256GB (16GB×16)

HDD: SATA Enterprise 1 TB

ワークステーションでは平均して 48.18 秒/ステップの計算速度であった. 格子数が 1/4 であれば約 12 秒/ステップと予測され, これに対して SX-ACE は表1より約 0.47 秒/ステップと見積もられる. コア数に差があることを考慮しても, ベクトル計算機 SX-ACE では (市販の) ワークステーションに比べて数十倍の速度性能を有することが分かる.

表 1 プログラム性能 (SX-ACE, 1 ノード 4 コア利用時). 200,000 ステップ分の計算結果.

実行時間 [hh:mm:ss]	26:22:24	プロセッサ同時実行時間	
CPU 時間 [hh:mm:ss]	105:17:34	Conc. Time (≥ 1) [sec]	94939.77
Flops 値	12.6×10^9	Conc. Time (≥ 2) [sec]	94936.70
Flops 値 (実行時間換算)	50.3×10^9	Conc. Time (≥ 3) [sec]	94917.43
ベクトル長	255.78	Conc. Time (≥ 4) [sec]	94260.90
ベクトル演算率	99.68%	MIPS [million instructions/sec]	174.643
CPU バンクコンフリクト [sec]	3019	MIPS (実行時間換算)	697.276

4. 計算結果

図 5, 6 は初期レイノルズ数 $Re = 745$ の計算結果で, それぞれの初期攪乱強さにおいて, 壁垂直方向速度 v の瞬時分布の時間変化を示したものである. ここで, レイノルズ数はチャンネル中心速度 u_c , チャンネル半幅 δ , および動粘度で無次元化したものである. ただし, チャンネル中心速度は層流を仮定した値であり, 乱流遷移の程度に従い変化するため, ここでは初期値を示す. 本 DNS では, バルク平均流速 U_{bulk} を一定としているため, バルクレイノルズ数 (U_{bulk} と h に基づく) は $Re \times 4/3$ で一定である. 図 5 に示す $A = 9.2$ のとき, 初期攪乱で与えた渦対は乱流斑点を形成し, その後に乱流帯へと成長した. 計算開始直後の図 5(a)では, 点状の乱流域 (むしろ渦対であり, 厳密には乱流状態に至っていない) が二次元的に時々刻々と拡大し, 図 5(b)では 2 つの乱流斑点に分裂している様子が窺える. その後, 一つの斑点は即座に減衰して, もう一方が図 5(c)-(e) のように $t^* = tU_{bulk}/\delta = 400$ で典型的な乱流帯を形成している. その後, 乱流帯は減衰していくが, これは依然として狭い計算領域と周期境界のために, 乱流帯の上・下流端で干渉し合ったためと考えている. 図 6 の $A = 9.5$ では, 初期攪乱が図 5 の場合よりも僅かに強いにも拘らず, 乱流帯は成長せずに $t^* = 400$ で殆ど層流化する結果となった.

他の初期攪乱強度 ($A = 14$ まで) やレイノルズ数 ($Re = 740 \sim 800$) での試行も重ねたが, A または Re が大きいほど乱流帯へと成長しやすい傾向があった. 但し, 上述の通り, 必ずしも強い初期攪乱が乱流帯になるわけでもなく, 確率的な要素 (もしくはカオスの特徴である初期値鋭敏依存性) を含むことが確認された. つまり, レイノルズ数が小さいほど乱流帯への成長確率が下がり, 著者らの限られた試行回数 (数十回) においては $Re \leq 740$ で乱流帯形成を確認できなかった. また, 乱流帯へと成長しやすい複数の A の最適値があることを見出した. この傾向は Schmiegel & Eckhardt [21] の主張と一致している.

図 5 のように $t^* = 400$ 以降は減衰する結果となったが, 各方向領域を $51.2h$ から倍の $102.4h$ とし, 4 倍の計算領域で DNS を行った. 図 7(a) は $Re = 745$ で $A = 9.2$ の条件における, 乱流エネルギーの時間変化である. 空間平均値であるため, 4 倍の計算領域を用いた場合 (図中の赤線) が約 $1/4$ の値となっているが, 面積で除さない積分値としてはほぼ同値の結果となる. 興味深いことには, $t^* = 400$ では両計算領域サイズで乱流帯を形成して同程度の乱流エネルギー積分値であるのに対し, 後半 ($t^* = 800$ 頃) になると狭い計算領域では急激に層流化し, 広い計算領域では減衰が緩やかになり層流化が抑えられている. これは周期境界の影響が弱まったためと考えられる. この 4 倍の計算領域サイズを用いて, 次に乱流帯の成長速度に着目した. 詳細は省略するが, 定量的に乱流帯の両端を定め, その 2 点間距離を時々刻々と追跡した. 図 8 に結果の二例を示す. 図 8(a)

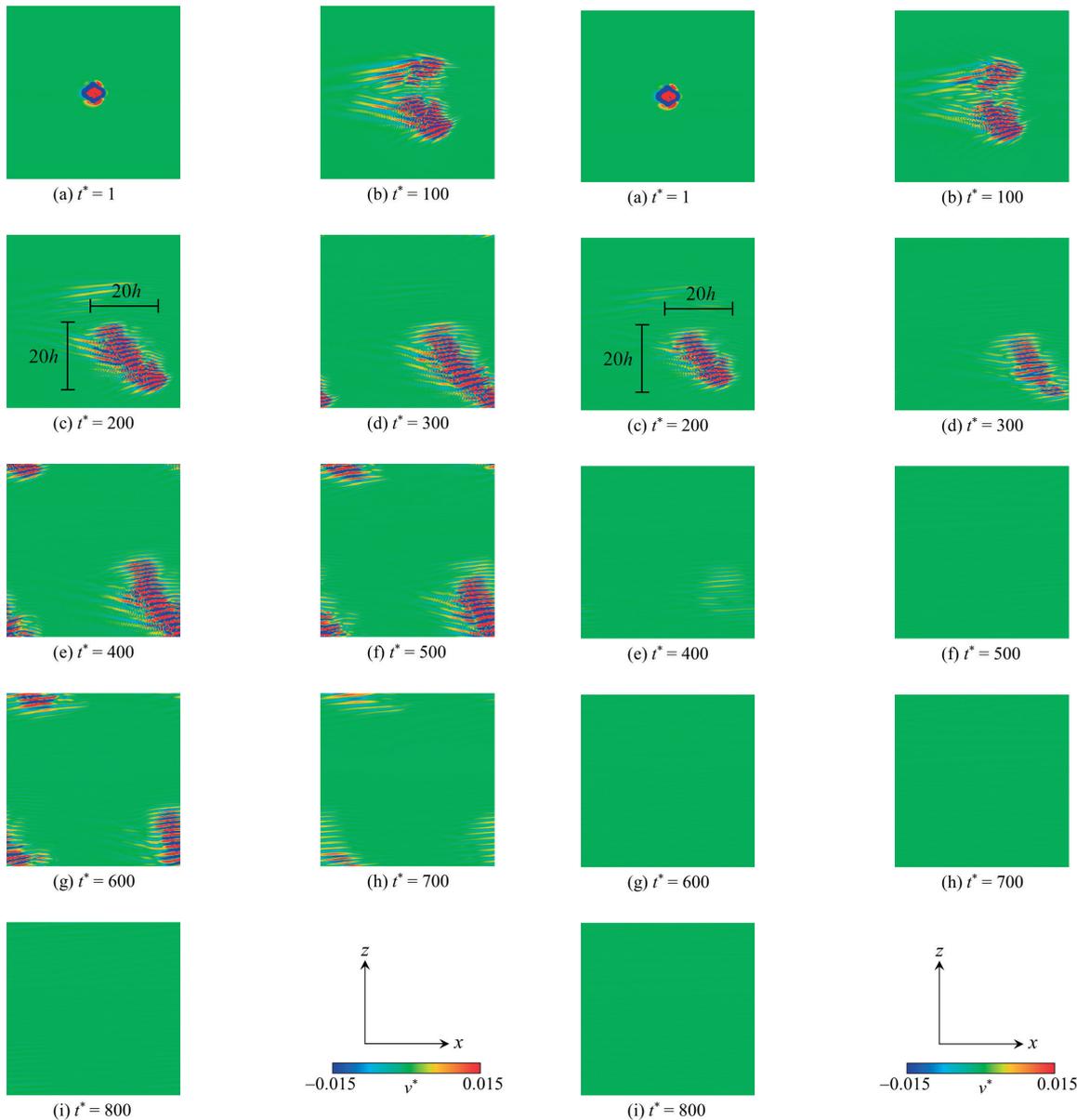


図 5 乱流斑点から乱流帯への発達過程を示す，瞬時速度場の時系列： $Re = 745$ ， $A = 9.2$ ．時間の無次元化は δ/U_{bulk} によるもので，領域サイズは $L_x \times L_z = 51.2h \times 51.2h$ である．

図 6 瞬時速度場の時系列．図 5 と同様，但し初期攪乱強度 $A = 9.5$ の場合を示す．

は乱流帯へ成長しようとしたが減衰した場合の乱流帯の長さの時間変化を，図 8(b)は乱流帯へ成長した場合の乱流帯の長さの時間変化を示したものである．不連続な変化が時折見受けられるが，分裂した乱流帯の一方が打ち消されたことによるものである．また，乱流帯へ成長した場合（図 8(b)）， $t^* = 600$ 辺りからグラフの傾きが急になっていることが分かる．これらのグラフから，1 次関数的に増加しているとみなせる所で，最小二乗法により傾き (dL/dt) を算出し，これを乱流帯の成長速度と定義した．乱流帯へ成長しようとしたが減少する場合，値が小さい場合もあるが概ね 0.06 程度の値をとる結果となった．乱流帯へ成長する場合，成長初期は減衰する場合と同じような成長速度を呈し，その後成長速度が上昇し安定的な成長を見せた．後者の安定した成長速度は概ねレイノルズ数が高いほど速いという結果を得ている．このことから帯成長には，準備

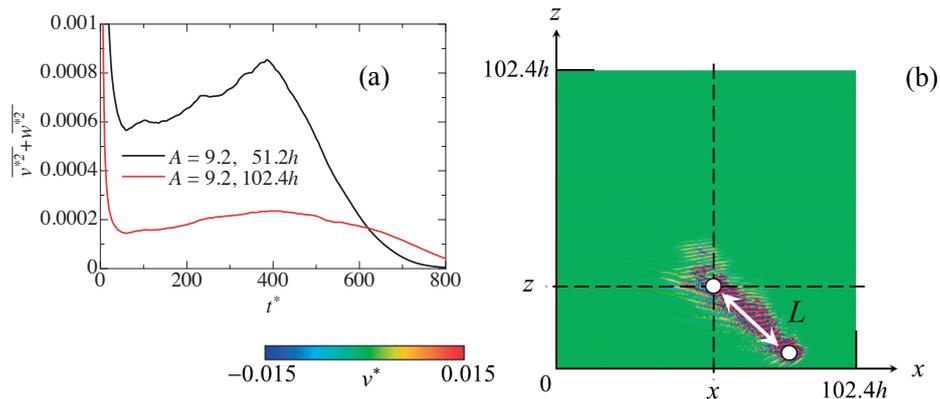


図7 乱流帯の時間発展と瞬時構造 : (a) チャンネル中央平面内における、主流法線方向速度成分の乱流エネルギー $(v^2 + w^2)/U_{\text{bulk}}^2$ 平均値に見る時間変化 ; (b) 成長途中にある乱流帯に対して上流・下流の端を定義し、乱流帯の長さ L を決定。初期レイノルズ数は $\text{Re} = 745$ であり、(a)では異なる計算領域サイズの結果を比較し、(b)では大きい場合の結果を示す。

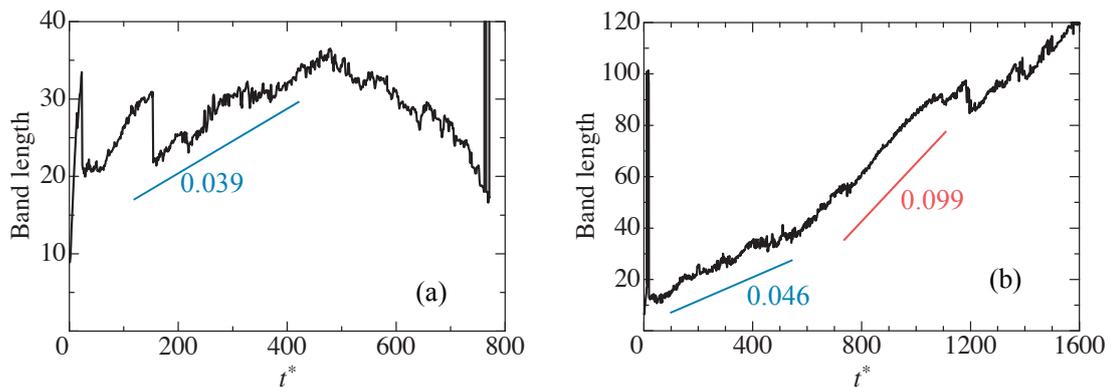


図8 乱流帯長さ L の時間変化 : (a) $\text{Re} = 745$, $A = 9.2$; (b) $\text{Re} = 780$, $A = 10$. いずれも計算領域サイズ $L_x \times L_y \times L_z = 102.4h \times h \times 102.4h$ の結果である。図中の補助線と数値は平均成長率 $(dL/dt)/U_{\text{bulk}}$ を示す。

期と安定期の2段階が示唆される。安定期の成長速度はレイノルズ数減少に伴い小さくなり、 $\text{Re} = 700$ 弱で準備期と同程度になると予測される（結果の詳細は省略）。Taoら[22]は $\text{Re} = 660$ での乱流帯成長をDNSで実証しているが、これは初期攪乱として安定期の乱流帯を与えているためと考えられる。Taoらが示した成長速度は本研究で見出した準備期の成長速度とよく一致する。

5. 結言

平面ポアズイユ流の直接数値解析により、乱流斑点が乱流帯へと成長するレイノルズ数の限界（下臨界値 Re_G ）を調査し、局所攪乱に対して $\text{Re}_G = 750$ 程度であること、および帯成長には準備期と安定期の2段階があることを見出した。準備期と安定期では帯成長速度が異なり、後者はレイノルズ数に依存することが分かった。しかし、帯形成には確率的要素を含むため、より厳密な Re_G の決定、および層流乱流転移の連続性の議論には、まだ膨大な試行と大きな計算領域が必要とされる。本解析も含めて、このような数値シミュレーションには高性能のスーパーコンピュータ利用が不可欠であり、MPI並列プログラムの高効率化も必須である。引き続き、東北大学

サイバーサイエンスセンターの共同研究などを通してプログラム高性能化および高度なコンピュータ環境利用が望まれる。

謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。また、研究にあたっては同センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただいた。研究費の一部は科学研究費補助金として、新学術領域（研究領域提案型）「壁乱流亜臨界遷移の間欠乱流パターン形成の大規模 DNS 解析（16H00813）」および「亜臨界乱流遷移におけるグローバル安定性と大規模間欠構造の複雑流への研究展開（16H06066）」から支援を受けたものである。

参考文献

- [1] O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **174**, 935–982, 1883.
- [2] R. R. Kerswell, Transition scenarios: normality vs non-normality, *Lecture Note* **7**, 2011, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/rrk26/Papers/lecture7.pdf>
- [3] A. E. Gill, The least-damped disturbance to Poiseuille flow in a circular pipe, *JFM*, **61**, 97–107, 1973.
- [4] I. J. Wygnanski and F. H. Champagne, On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug, *JFM*, **59**, 281–335, 1973.
- [5] K. Avila *et al.*, The onset of turbulence in pipe flow, *Science*, **333**, 192–196, 2011.
- [6] D. Barkley *et al.*, The rise of fully turbulent flow, *Nature*, **526**, 550–553, 2015.
- [7] V. A. Romanov, Stability of plane-parallel Couette flow, *Functional Analysis and its Application*, **7**, 137–146, 1973.
- [8] S. Bottin *et al.*, Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow, *EPL*, **43**, 171–176, 1998.
- [9] A. Prigent *et al.*, Large-scale finite wavelength modulation within turbulent shear flows. *PRL*, **89**, 014501, 2002.
- [10] H. W. Emmons, The laminar-turbulent transition in a boundary layer, *J. Aeronaut. Sci.*, **18**, 490–498, 1951.
- [11] T. Tsukahara *et al.*, DNS of turbulent channel flow at very low Reynolds numbers. In: *Proc. 4th Int. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomena*, pp. 935–940, 2005; *arXiv Preprint*, 1406.0248.
- [12] T. Tsukahara *et al.*, Turbulence stripe in transitional channel flow with/without system rotation, In: *Proc. 7th IUTAM Symp. Laminar-Turbulent Transition*, Springer Netherlands, 421–426, 2010.
- [13] M. Sano and K. Tamai, A universal transition to turbulence in channel flow, *Nature Phys.*, **12**, 249–253, 2016.
- [14] S. A. Orszag, Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation, *JFM*, **50**, 689–703, 1971.
- [15] D. R. Carlson *et al.*, A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow, *JFM*, **121**, 487–505, 1982.
- [16] M. Nishioka and M. Asai, Some observations of the subcritical transition in plane Poiseuille flow, *JFM*, **150**, 441–450, 1985.
- [17] 塚原隆裕, 石田貴大, 平面ポアズイユ流の亜臨界遷移における下臨界レイノルズ数, 日本流体力学会誌「ながれ」, 第 34 巻 第 6 号, 383–386, 2015.
- [18] M. Chantry *et al.*, Universal continuous transition to turbulence in a planar shear flow, *JFM*, **824**, R1, 2017.
- [19] 佐野雅己, 層流・乱流転移と有向パーコレーション相転移, 土木学会基礎水理シンポ, 2017.
- [20] D. Henningson *et al.*, Numerical simulations of turbulent spots in plane Poiseuille and boundary-layer

- flow, *Phys. Fluids*, **30**, 2914–2917, 1987.
- [21] A. Schmiegel and B. Eckhardt, Fractal stability border in plane Couette flow, *PRL*, **79**, 5250–5253, 1997.
- [22] J. J. Tao *et al.*, Extended localized structures and the onset of turbulence in channel flow, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 011902, 2018.