[共同研究成果]

Building-Cube Method を用いた エンジンナセルインレットからの騒音伝播解析

福島裕馬¹,大林茂²,佐々木大輔³,中橋和博⁴ ¹東北大学大学院工学研究科,²東北大学流体科学研究所 ³金沢工業大学工学部,⁴宇宙航空研究開発機構

次世代の数値流体解析手法として提案された Building-Cube Method を用いて,航空分野を中心 に実用的な大規模シミュレーションの取り組みを進めている.本稿では Building-Cube Method の 利点を生かして,航空機エンジンから発生する騒音の解析を行い,その結果を示す.騒音の解析 には高周波を解像するために膨大な格子点数が必要となり計算負荷が高くなる傾向にあるが,ベ クトル化された Building-Cube Method ソルバーとサイバーサイエンスセンターの計算機環境の利 用により大規模空力音響解析を実現した.

1. 緒言

近年,高バイパス比エンジンの採用などによって航空機から発生する騒音は低下している.その一方で,空港付近の騒音規制は以前に増して厳しくなっており,航空機から発生する騒音の更なる低騒音化に向けた研究はより重要になっている.

航空機からの騒音はエンジン騒音,機体騒音に分けることができ,エンジン騒音にはファン騒 音,ジェット騒音がある.エンジンがフルスロットルの状態である離陸時にはファン騒音,ジェ ット騒音が支配的であり,着陸時にはスラットや展開中のフラップなどの高揚力装置,脚などの 降着装置から発生する機体騒音の割合が増加するという傾向が顕著に見られる.

一般的な空力音響場の数値解析は、最初に音源周辺の流れ場をナビエ・ストークス方程式で解 き、その結果から Lighthill の音響学的類推に基づいて遠方音場を予測するという分離方法が用い られる.固体境界の影響を考慮した Curle の式を用いた解析は計算コストの点から優れており、 広く用いられている[1].しかしこの手法には、流れ場の一様性、音源のコンパクト性を仮定して いるという問題点もある.これに対して、圧縮性オイラー方程式を音波成分に対して線形化した 線形オイラー方程式 (Linearized Euler Equation, LEE)を用いた解析法が注目されており、軸対称エ ンジン形状からの騒音解析に用いられている[2].LEE による解析は、解析対象が一様な流れ場の 領域に限定されず、物体近傍での回折や反射も取り入れた騒音の予測に適している.

実践的な複雑形状を取り扱うことを考えると、従来の構造格子、非構造格子を用いた手法では それぞれ課題がある.構造格子を用いた解析では、物体形状に沿った格子を配置するために物体 適合性に優れているが、航空機全機形状やさらに複雑な形状周りに格子を生成するには膨大な時 間を要し、実用的ではない.非構造格子による解析は、複雑形状を扱うのに優れているが、一般 に空間精度が低く、高次精度の解析手法である Discontinuous Galerkin Method (DGM)では格子点当 たりの計算コストが大きくなる.そこで本研究では、単純な直交格子を用いた解析に着目した. 直交格子による解析では、空間を直交に分割するという簡便さのために複雑形状を容易に扱うこ とができる.また、空間高次精度化が容易、計算効率が高いという利点もある.

直交格子を用いた解析は、階段状近似による影響をできるだけ小さくするために、物体近傍に 細かい格子を必要とする.しかし、等間隔格子や不等間隔格子において高密度な格子を用いると、 細かい格子点が不必要な遠方にまで配置される.そこで本研究では、中橋の提案した直交積み上 げ法 (Building-Cube Method, BCM [3])により解析を行う.物体から離れた領域においては必要十分 な密度の格子を用いる一方で、物体近傍にはより細かく細分化された格子を用いることで、格子 点数の増加を抑えながら階段状近似による誤差を抑制できる.しかしながら、局所細分化格子の みでは、物体近傍をどれほど細かく細分化しても、表面に関しては階段状近似の影響は残ってし まうため、より高精度な壁面の取り扱いが望ましい.加えて、陽解法による解析では最小格子幅 によって時間ステップが決定してしまう.これらのことより、精度良い解析を実用的な細かさで 行う必要があり、本研究では埋め込み境界法(Immersed Boundary Method, IBM)による物体表現を用 いる.

本稿では、BCM のアルゴリズムに基づく LEE ソルバーを用いて航空機エンジンを模した Generic Inlet 形状からの騒音伝播の解析を行う. 比較の対象は 50m 遠方における Sound Pressure Level (SPL)分布であり,遠方での指向性の推定は Ffowes Williams-Hawkings (FW-H)法により行う. 計算領域内の Point Per Wavelength (PPW)の変化, FW-H 面の位置による変化, ナセル周りの格子を 細分化した際の変化をそれぞれ比較することにより,本計算手法の騒音解析における有効性を検 証する.

2. 計算手法

2. 1 線形化オイラー方程式(Linearized Euler Equations, LEE)

騒音伝播の支配方程式である LEE を式(1), (2)に示す. LEE は、圧縮性オイラー方程式の物理変数 $Q \in Q = Q_0 + Q'$ のように流れ場の平均成分 Q_0 と変動成分 Q'に分解することで得られる. (1), (2) において H は平均成分の空間変動についての項であり、S は音源項である. また、y は比熱比である. 計算の際は、流れ場の平均成分 Q_0 と音源項 Sを与え、変動成分 Q'の時間発展を計算する.

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} + H = S$$
(1)

$$Q' = \begin{bmatrix} \rho'\\ u'\\ v'\\ v'\\ p' \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} \rho_0\\ u_0\\ v_0\\ w_0\\ p_0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho_0u' + \rho'u_0\\ u_0u' + \frac{p'}{\rho_0}\\ u_0v'\\ u_0w'\\ u_0p' + \gamma p_0u' \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho_0v' + \rho'v_0\\ v_0u'\\ v_0v' + \frac{p'}{\rho_0}\\ v_0w'\\ v_0p' + \gamma p_0v' \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho_0w' + \rho'w_0\\ w_0u'\\ w_0v'\\ w_0w' + \frac{p'}{\rho_0}\\ w_0p' + \gamma p_0w' \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0\\ u'\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \nabla\overline{\mathbf{v}_0}\right) + \frac{1}{(\rho_0)^2}\left(\rho'\frac{\partial p_0}{\partial x} + p'\frac{\partial \rho_0}{\partial x}\right)\\ v'\left(\frac{\partial v_0}{\partial z} - \nabla\overline{\mathbf{v}_0}\right) + \frac{1}{(\rho_0)^2}\left(\rho'\frac{\partial p_0}{\partial z} + p'\frac{\partial \rho_0}{\partial y}\right)\\ w'\left(\frac{\partial w_0}{\partial z} - \nabla\overline{\mathbf{v}_0}\right) + \frac{1}{(\rho_0)^2}\left(\rho'\frac{\partial p_0}{\partial z} + p'\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)\\ (\gamma - 1)\left[p'\nabla\overline{\mathbf{v}_0} - \overline{\mathbf{v}}\nabla p_0\right] \end{bmatrix}$$

$$(2)$$

2.2 計算アルゴリズム

数値計算は BCM の計算アルゴリズムにより行われる[3]. BCM では計算領域全体で等間隔直交 格子を用いることで,前処理・数値計算・後処理のすべての段階で処理を単純化できる.計算格 子の生成は,図 1(a)のように,計算領域を Cube と呼ばれる 2"倍の大きさの違いを持つ正方形領 域に分割し,次に, Cube を図 1(b)のように各軸方向同数の格子点(Cell)で分割する.また,それぞ れの Cube は隣り合う Cube と重なり合った overlap Cell を 3 つ持っており, overlap Cell に物理量 を補間することで隣り合う Cube と情報交換を行いながら計算を進める.図2に LEE ソルバーの 計算アルゴリズムを示す.計算の初期で計算格子や物体形状データを入力し,前処理を行う.本 研究では Runge-Kutta 法により時間積分を行うので,その反復計算の中で,計算領域を占める Cube 内の計算は OpenMP により並列に行われる.BCM の計算格子は,すべての Cube が同数の Cell を 含んでいるので,並列計算の際に負荷の偏りがなく並列化効率に優れている.Cube において計算 する内容は以下である.

1.Cube 境界において隣接する Cube との情報交換

2.支配方程式を計算

3.Runge-Kutta 法における仮の物理量 Q_{sub} を更新

4.緩衝領域で物理量を減衰

空間微分は4次精度の有限差分スキームである Dispersion Relation Preserving (DRP)スキーム[4] を用いる.また,計算で発生する非物理的な振動を取り除くために4次精度の Damper を適用し ている.時間積分には6段4次精度の Low Dissipation Dispersion Runge-Kutta (LDDRK)[5]を用いる. LEE ソルバーの計算では,発生した騒音は計算領域の外部境界で反射してしまう.それを防ぐた め,本研究では外部境界付近に緩衝領域を設定し,緩衝領域では buffer zone 境界条件[6]により物 理量を減衰させる.





2. 3 埋め込み境界法(Immersed Boundary Method, IBM)

本研究で用いる IBM は ghost cell (GC)と image point (IP)を用いたものである[7]. まず,物体形 状を Stereo Lithography (STL)データとして入力し,それを用いて計算 Cell が物体の内部か外部か を判別する.そして,物体内部の一層目の Cell を GC として用いる.そして,GC から物体垂直 方向に,最小 Cell の 1.5 倍の長さの位置に IP を定義する.そして IP に周りの Cell から物理量を 補間し, IP での値を用いて物体表面で滑り壁境界条件を満たすように GC の物理量を決定する. IP への補間を行う際,三次元では IP を囲む $3 \times 3 \times 3$ の 27 点を用いて逆距離加重法によって行う(図 3).



2. 4 Cube 境界での情報交換

大きさの違う Cube の境界では格子点が繋がっていないために、補間によって情報交換を行う必要がある.本研究では高次の多項式補間法であるラグランジュ補間を用いた[8]. これは、式(3)、

(4)に示す距離の重み係数を用いて補間を行うものである.

$$Q_{OC} = \sum_{j,k,l} Q_{j,k,l} w_j(x_{OC}) w_k(y_{OC}) w_l(z_{OC})$$
(3)

$$w_{j}(x_{OC}) = \prod_{i \neq j} \frac{(x_{OC} - x_{i})}{(x_{j} - x_{i})}, \quad w_{k}(y_{OC}) = \prod_{i \neq k} \frac{(y_{OC} - y_{i})}{(y_{k} - y_{i})}, \quad w_{l}(z_{OC}) = \prod_{i \neq l} \frac{(z_{OC} - z_{i})}{(z_{l} - z_{i})}$$
(4)

ここで, Q_{oc} は overlap Cell での物理量であり, $Q_{j,k,l}$ はステンシルでの物理量である. $w_j(x_{oc})$, $w_k(y_{oc})$, $w_l(z_{oc})$ は overlap Cell への補間に用いる重み係数である.また, x_{oc} , y_{oc} , z_{oc} は overlap Cell の x,y,z 座標であり, x_i , y_i , z_i は補間に用いるステンシルの座標である.

図4は二次元での補間に用いるステンシル配置を示している.図4(a)は小さい Cube から大きい Cube への補間に用いるステンシルである. Overlap Cell は1列に対して3つであるが,ルンゲ現 象を抑えるため,補間に用いるステンシルが対称となるように Cube 境界に最も近い Cell は2×2 点での補間,その他2つは4×4 点での補間を行う.図4(b)は大きい Cube から小さい Cube への補間に用いるステンシルである. こちらは overlap Cell 2列分の補間点に対して大きい Cube の3×3 点の同じ Cell の物理量を用いた補間を行う.



2.5 音源の設定方法

ファン騒音の入力は Tyler と Sofrin により提案された spinning mode 入力により与える. これは, ファンや動翼・静翼の相互干渉によって発生する騒音を模したものであり,以下の式によって音 圧変動を与えるものである.

$$p'(x,r,\theta,t) = a[J_m(k_r r) + c_1 Y_m(k_r r)]\cos(kt - k_a x - m\theta)$$
(5)

ここで, J_m , Y_m はそれぞれ m 次の第1種, 2種の Bessel 関数である. k_a は axial wavenumber, k_r は radial wavenumber である. k_r の n 次の解は以下の式に剛壁の境界条件を与えることにより求まる.

$$\frac{d[J_m(r_{outer}k_r)]}{dr}\frac{d[Y_m(r_{inner}k_r)]}{dr} - \frac{d[J_m(r_{inner}k_r)]}{dr}\frac{d[Y_m(r_{outer}k_r)]}{dr} = 0$$
(6)

ここで、router、rinnerはダクトの内半径、外半径である. kaは以下の式から計算される.

$$k_{a} = \frac{k}{1 - M_{j}^{2}} \left(-M_{j} \pm \sqrt{1 - \frac{k_{r}^{2}(1 - M_{j}^{2})}{k^{2}}} \right)$$
(7)

ここで,+は円柱座標において正方向に進む波,-は負方向に進む波を表している.係数 c1 は以 下の式により計算される.

$$c_{1} = -\frac{(d/dr)[J_{m}(r_{outer}k_{r})]}{(d/dr)[Y_{m}(r_{outer}k_{r})]} = -\frac{(d/dr)[J_{m}(r_{inner}k_{r})]}{(d/dr)[Y_{m}(r_{inner}k_{r})]}$$
(8)

2.6遠方での騒音の推定方法

本研究では Ffowcs Williams-Hawkings (FW-H)法を用いて遠方音場を推定する. FW-H 法とは,近 傍の音源を囲む閉曲面上の物理量データの時間変化を用いて、遠方での物理量の時間変化を推定 する計算手法である.この閉曲面を FW-H 面と呼ぶ.遠方場の騒音推定のための計算の流れは以 下のようになる.まず,ファン面に spinning mode 入力を与える.そして, LEE により近傍での 騒音の伝播を解析する. 最後に FW-H 法により遠方での騒音の伝播を推定する.

3. Generic Inlet 周りの騒音伝播解析

三次元軸対称ナセル形状である Generic Inlet からの騒音伝播を解析し,解析パラメータを変化 させた場合の遠方における SPL 分布を比較する.また,DGM を用いた市販の計算ソルバーであ る ACTRAN/DGM による計算結果と比較することで、本手法の計算精度を確認する.

計算対象となる Generic Inlet 形状を図 5 に示す. 図内の点線はファン面の位置である. また, 青線は音響ライナーの設置位置を示しているが、今回の解析では用いない、計算領域の原点は図 5(a)の z=0, y=0 の位置であり,計算領域の大きさも図 5(a)の値を無次元化して用いている.発生 する騒音の周波数は 1,578Hz であり, spinning mode はモード(24,1)を用いる.

計算格子を設定する際にはまず, 音源位置と緩衝領域を考慮して計算領域を設定する. 今回の 解析では計算領域の v.z 方向に無次元長さ3の緩衝領域を持ち,その中に約 80 点の格子点を用い る. これらのパラメータは,過去の研究から十分な減衰効果を持っていると考えられる[9]. +x 方 向はこの倍の領域を持っているが、-x 方向は約 1.5 の緩衝領域を確保している. これはナセルを 回折して後方に回り込む音波は弱く、十分に減衰させることができると考えられるためである. 次に,音源周りの PPW を設定し,それによって一つの Cube の分割数を決定する.今回の解析で は計算領域と緩衝領域を明確にするため、また、ナセル周りの格子の細分化を行うことを考え格 子点を配置した.

図6に、計算領域内のCube配置を、表1に解析に用いた格子情報を示す. 今回の解析ではCube 数が 708 と 1,464 の二つの配置と,Cube 内の一辺の分割数を 30 と 40 として,合計 4 ケースの解 析を行う.図 6(a)の配置では最も小さい Cube の境界に FW-H 面を設置し,これにより遠方での騒 音の推定を行う.ただし,-x 方向の境界はナセルが途切れる位置とする.設置した FW-H 面より も外部に位置する Cube では格子の解像度が少ないことにより騒音が自然に減衰するか、または buffer zone 吸収境界によって減衰される. 図 6(b)に関しては図 6(a)と同じ位置に FW-H 面を設置す るが,このとき-x 方向の FW-H 面では格子が細分化されているため,この分だけ FW-H 面上の格 子点数が増加している. さらに Casel に関して, FW-H 面の位置を変化させて遠方での推定を行 い, これらの結果を Case1-2, Case1-3 とした. FW-H 面の位置は, Case1,2,3,4 では x=[-0.5,4.0], $y=[-3.0,3.0], z=[-3.0,3.0], Case1-2 \ tx=[-0.5,2.5], y=[-2.25,2.25], z=[-2.25,2.25], Case1-3 \ tx=[-0.5,1.75], z=[-2.25,2.25], z=[-2.25,2.25$ *v*=[-1.6,1.6], *z*=[-1.6,1.6]である.



(b) Case2,4 図6計算領域内のCube 配置

表1計算格子の詳細						
	Min. Cell size	Number of Cube	Number of Cells in one Cube	Total Number of Cells	Max. PPW	
Case1	0.0188	708	40×40×40	45,312,000	11.68	
Case2	0.0094	1,464	$40 \times 40 \times 40$	93,696,000	23.37	
Case3	0.0250	708	$30 \times 30 \times 30$	19,116,000	8.76	
Case4	0.0125	1,464	$30 \times 30 \times 30$	39,528,000	17.53	

図7に、Case1、Case2での、z=0 断面での圧力変動分布を示す.図7では、緩衝領域となっている部分は省いており、また、下半分にそれぞれの格子点の分布を一点おきに示している.図7を見ると、ファン面で発生した騒音がナセル内壁を伝わり、最終的に出口で回折して、半径方向に伝播している様子が確認できる.また、Case2ではCase1と比較して解像度が高いため、圧力変動のピークが高低共にはっきりと表れている.図8はCase1での圧力変動分布を+x方向から見た図であり、x座標ごとに示している.発生した騒音が回転しながら一旦すぼめられ、それを抜けると半径方向に大きく広がっている様子が確認できる.図8ではファンは反時計回りに回転している. 圧力変動のピークの数は高低共に24個あり、spinning modeの入力モードである(24,1)に対応していることが分かる.





図 8 +x 方向から見た圧力変動分布(Case1)

表2にFW-H 法に入力する圧力変動のサンプリング方法を示す.ここで,Total number of cycle はFW-H 法に入力として用いた合計の周期の数であるが,今回の解析ではLEE での解析の際に10 周期分を出力し,そのデータをコピーして用いている.遠方での音圧変動を測定する位置は,図5(a)に見られる点(1.5,0,0)を中心として半径 50 の位置にある点である. y=0, z=0 となる点を 0 deg として,半径方向に150 deg まで測定した.

夜2FW-H 法に八刀 9 る庄刀変動のサンノリンク方法						
	Total faces on FW-H surface	Time step per one cycle	Total number of cycle			
Case1	512,000	29				
Case1-2	268,800	29				
Case1-3	139,400	29	70			
Case2	684,800	58	70			
Case3	288,000	21				
Case4	385,200	42				

表 2 FW-H 法に入力する圧力変動のサンプリング方法

図9にCase1,2,3 および4の解の比較を示す.まず初めに、Case1,3の比較を行う.40 deg より 大きい角度での解にはそれほど差は見られないが,0 deg から 30 deg でのSPL は PPW の低い Case3 の方が大きくなっている.これは Case3 の解像度が低いためにナセル湾曲部での反射が顕著に見 られ、逆にナセル出口における回折はあまり見られないためであると考えられる.90 deg より大 きい角度での値にも Case3 の方に振動が見られ、伝播する音波を十分に解像できていないことが わかる.ACTRAN/DGM との解析結果と比較すると、40 deg から 120 deg までの値は Case1,3 共に ほぼ一致している.0 deg から 30 deg の値は Case1 の結果に近い値を示している.また、120 deg 以上の値は Case1,3 よりも高い値を示している.この結果を見ると、SPL が最大となる 40 deg か ら 70 deg までの指向性は本計算手法で高い精度で推定できることが分かった.ただし、SPL が小 さい 0 deg から 30 deg 位置、120 deg 以上の位置では、より高解像度の格子での解析が必要になる と考えられる.

次に、Case1,2,3,4 全体の比較を行う. Case1,3 は基準となる PPW が約 12 の格子, Case3,4 は約 9 の格子である. PPW が小さい Case3 の格子を細分化した Case4 では、0 deg から 30 deg 位置での SPL がわずかに小さくなった. これはナセル周りのみ格子の細分化によって解像度が上がったた めである. ただし、解全体に見られる振動は細分化によっても改善が見られなかった. これは, FW-H 面における PPW は Case3 と Case4 で変わらないためである. Case1,2 を比較すると、40 deg より大きい角度の SPL は ACTRAN/DGM での解析結果とよい一致を示しているが、0 deg から 30 deg の SPL は格子細分化による改善は見られなかった.

図 10 に Casel と Casel-2,1-3 の結果を比較する. すべての結果で大きな差は見られないが, 120 deg より大きい角度位置では Casel と比較して, Casel-2,1-3 での解析はより ACTRAN/DGM での 解析結果に近い値を示している. この理由として, Casel-2,1-3 での解析では FW-H 面自体が小さ くなるために, 遠方音場を推定する際の有効データ率が高くなるためである. 実際に, より多く の FW-H 面データを用いて解析を行った結果では遠方での解析結果は Casel-3 の結果に収束した.



4. 結論

Building-Cube Method のアルゴリズムに基づく線形オイラー方程式コードを用いて, 航空機エンジンを模した軸対称ナセル形状からの騒音伝播解析を行い, 計算格子および遠方場推定における入力データを変えたときの遠方場 SPL の比較,および,非構造格子法による結果との比較を行った.その結果を以下に示す.

非構造格子法での解析と比較すると、すべてのケースにおいて 0 deg から 30 deg までの SPL が 20dB ほど大きくなっている. これは他の部分よりも差が顕著である. ナセル周りの Cube を 細分化した場合にはこの範囲で SPL は減少の傾向を示したため、非構造格子法に見られるように、 この付近における SPL は本来、より小さな値を示すと考えられる. ただし、0 deg から 30 deg で の SPL は他の位置での値と比較して小さいため、エンジンから発生する騒音を評価する際にはそ れほど大きい影響はないと考えられる.

FW-H 面の位置をナセルに近づけた場合には、120 deg 以上の位置での SPL に変化が見られ、非 構造格子法による結果に近付いた. FW-H 面の範囲が小さくなると、その分データ量が小さくな るため、Case1-3 の FW-H 面の配置でも十分であるということは有用な結果であると考えられる.

謝辞

本研究は東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用して行った.研究にあたっては同センター関係各位にご指導とご協力をいただいた.また,LEE コードのベクトル化には,NEC システムテクノロジー 曽我 隆 様,山口 健太 様のご協力と助言をいただいた.本研究は科研費(21226018)の交付を受けたものである.本研究で用いた Generic Inlet 形状のデータ,非構造格子法による計算データは Fluid Dynamics and Acoustic Group, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton から提供された.記して謝意を表す.

参考文献

- [1] 恩田博ら, "Building-Cube 法を用いた JAXA 主脚モデルの詳細部品の流体解析," 第24 回数値流 体力学シンポジウム講演論文集(USB), 横浜, 2010 年 12 月.
- [2] Huang, X., *et al.* "Efficient computation of spinning modal radiation through an engine bypass duct," AIAA Journal, Vol. 46, pp. 1413-1423, 2008.
- [3] Nakahashi, K., Kim, L-S. "High-Density Mesh Flow Computations by Building-Cube Method," Computational Fluid Dynamics 2004, edited by C. Groth and D.W.Zinggm, Springer, pp. 121-126 2006.
- [4] Tam, C. K. W. "Recent advances in computational aeroacoustics," *Fluid dynamics research*, Vol. 38, pp. 591-615, 2006.
- [5] Berland, J. et al., "Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm," Computers and Fluids, Vol. 35, pp. 1459-1463, 2006.
- [6] Richards, S. K., *et al.* "The Evaluation of Non-Reflecting Boundary Conditions for Duct Acoustic Computation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, pp. 539-557, 2004.
- [7] 西村康孝ら, "圧縮性 Building Cube Method を用いた翼周りの Euler 解析," 第43 回流体力学講 演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2011, 2011 年 7 月.
- [8] Ishida, T. "Study of High-order/High-Resolution Method for Flow Simulation with Cartesian Grid Method," 東北大学 博士論文, 2011.
- [9] 福島裕馬ら, "ブロック構造型直交格子と IB 法を用いた LEE コードの構築,"日本航空宇宙学 会論文集, Vol. 60, pp.56-63, 2012.