

[共同研究成果]

高次のCBFMを用いた誘電体近傍アンテナの数値解析

今野 佳祐[†], 陳 強[†], 澤谷 邦男^{††}
 東北大学大学院工学研究科 通信工学専攻[†]
 東北大学未来科学技術共同研究センター^{††}

1 まえがき

CBFM(Characteristic basis function method)は, 大規模問題に対する高速モーメント法の1つとして知られている [1]. CBFMは, ブロック単位で新たな基底関数 (CBF, Characteristic basis function) を生成し, CBFを用いて行列を圧縮してから解くという手法である. 本報告では, 我々が提案した高次のCBFMを用いて誘電体近傍アンテナを数値解析し, その精度と計算時間を明らかにする.

2 高次のCBFMの原理

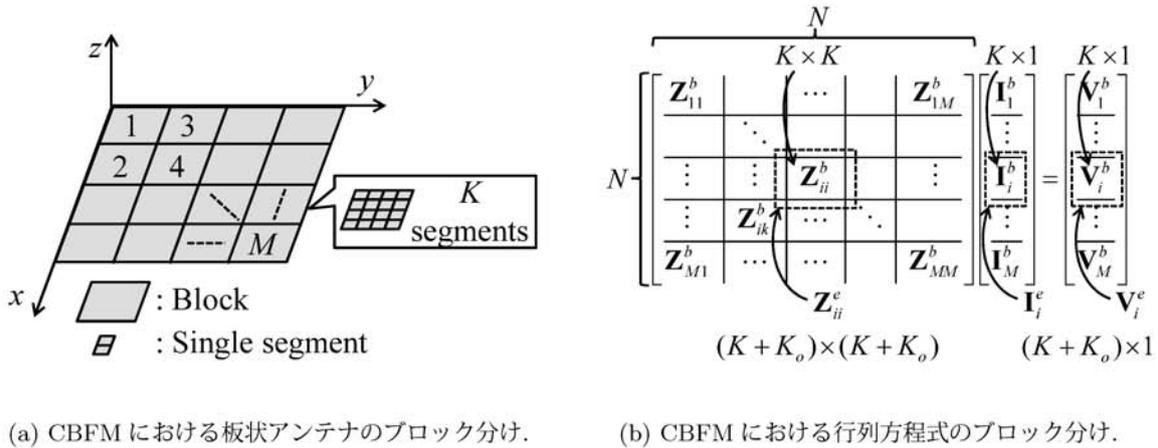
図1(a)に示す板状アンテナの解析を例にとり, 文献 [2] で示されている3次のCBFMを拡張した, L 次のCBFMの原理を説明する. なお, 従来のCBFMは2次のCBFMに相当する. L 次のCBFMでは, 従来のCBFMと同様に, まず図1(a)に示すように解析モデルを M 個のブロックに分割する. そして, 解析モデルの分割に対応するように Z 行列 (波源と観測点との電氣的なつながりを意味する値である自己・相互インピーダンスから成る行列.) を M^2 個のブロックに分割し, 電圧ベクトルと電流ベクトルはどちらも M 個のブロックに分割する. なお, 図1(b)において, N は総セグメント数, M は解析モデルを分割したブロック数, K は各ブロック中におけるセグメント数 (すなわち, $N = MK$ となる.), K_o は後述するブロック間のオーバーラップセグメント数である. また, \mathbf{Z}_{ik}^b は i 番目のブロックと k 番目のブロック間の $K \times K$ 相互インピーダンス行列, \mathbf{V}_i^b と \mathbf{I}_i^b はそれぞれ K 元のブロック電圧・電流ベクトルである. 役割は後述するが, オーバーラップセグメントを含んだ拡張ブロック (Extended block) も CBF(Characteristic Basis Function) を求める過程で用いられ, 通常のブロック行列と区別するために図中では上付き文字の e が付けられている.

さて, 高次のCBFMでは, M 個のCBFに重み係数を乗じたものの和によって, 各ブロック中に流れる電流を以下のように表す.

$$\mathbf{I}_i^b = \alpha_{(i,i)}^{l=1} \mathbf{J}_{(i,i)}^{b(l=1)} + \sum_{l=2}^L \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^M \alpha_{(i,k)}^l \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)} \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M \quad \text{where } L \geq 2)$$

ここで, $\mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}$ は第 i ブロックにおける k 番目の l 次 CBF であり, 特に $i = k$ で $l = 1$ のとき Primary basis, $i \neq k$ で $l = 2$ のとき Secondary basis と呼ばれる. $l > 3$ の CBF が高次の CBF である (なお, 文献 [2] で $l = 3$ の CBF は Tertiary basis と呼ばれている). また, $\alpha_{(i,k)}^l$ はそれぞれの



(a) CBFM における板状アンテナのブロック分け. (b) CBFM における行列方程式のブロック分け.

図 1: CBFM のブロック分け

CBF に乗じる重み係数を表す. $\mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}$ は, 第 i ブロックにおける電流のうち, 第 k ブロックの寄与による成分を表すという物理的な意味を持ち, $\alpha_{(i,k)}^l$ は対応する CBF の寄与の大きさを示すものと解釈することができる. 各ブロックを流れる電流を (1) 式のように表現することは, N 個のセグメントに対応する電流係数を求めるという元の問題を, M^2 個の CBF 及びその重み係数を求める問題に変換したことを意味している. 以下では CBF と重み係数を求めて解を得るまでの手順を示す.

まず, 全ブロックにおける Primary basis $\mathbf{J}_{(i,i)}^{b(l=1)}$ を求める. Primary basis は, 当該ブロック内に与えた電圧によって当該ブロック内に生じる電流を表しており, 一般的には最も寄与の大きな CBF であることが多い. 従って, Primary basis の精度は最終的な解の精度を左右すると考えられるが, ブロック行列方程式を解いて得られる Primary basis は, ブロックの周囲にあるセグメントとの連続性を無視することで生じる不要なエッジ効果を含んでおり, 必ずしもその精度は良くない. そこで, 不要なエッジ効果を除去した Primary basis を得るために, 当該ブロック周囲にある K_o 個のセグメントをオーバーラップセグメントとして導入した $(K + K_o) \times (K + K_o)$ の拡張ブロック行列方程式 (2) を解く.

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,i)}^{e(l=1)} = \mathbf{V}_i^e \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

そして, (2) 式を解いて得られる $(K + K_o)$ 元の解ベクトル $\mathbf{J}_{(i,i)}^{e(l=1)}$ のうち, K_o 個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し, 残り K 個の成分を Primary basis として保存する. オーバーラップセグメントはブロック間の電氣的な連続性を担保し, 不要なエッジ効果を除去して Primary basis の精度を高める効果がある. その一方, オーバーラップセグメント数を大きくしすぎると計算時間が増大するという欠点がある. 従って, オーバーラップセグメント数 K_o は CBFM の精度と計算時間の両方に関わる重要なパラメータであると言える. なお, (2) 式を解く際に求めた逆行列は, Secondary basis 以降の CBF を求める箇所で必要になるため, ハードディスクに出力して保存しておく.

次に, Secondary basis を求める. Secondary basis は, 他のブロックに与えた電圧によって当該

ブロック内に生じる電流を表しており、以下のようなブロック行列方程式を解いて求める。

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l=2)} = \mathbf{V}_{(i,k)}^e \quad \text{where} \quad \mathbf{V}_{(i,k)}^e = -\mathbf{Z}_{ik}^{e'} \mathbf{J}_{(k,k)}^{b'(l=1)} \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M)$$

ここで、 $\mathbf{Z}_{ik}^{e'}$ は \mathbf{Z}_{ik}^e 中の $(K + K_o) \times K'$ ブロック行列であり、 $\mathbf{J}_{(k,k)}^{b'(l=1)}$ は Primary basis $\mathbf{J}_{(k,k)}^{b(l=1)}$ 中の K' 成分からなるベクトルである。なお、第 i ブロックと第 k ブロック間のオーバーラップセグメント数を K_o^{ik} とすると、 $K' = (K - K_o^{ik})$ が成り立つ。Primary basis を求めるときと同様に、(3) 式を解いて得られる $(K + K_o)$ 元の解ベクトル $\mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l=2)}$ のうち、 K_o 個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し、残り K 個の成分を Secondary basis として保存する。

そして、3 次以上の高次の CBF を求める。 l 次の CBF は、 $l-1$ 次の CBF の和を用いて、以下の式から求める。

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l)} = \mathbf{V}_{(i,k)}^e \quad \text{where} \quad \mathbf{V}_{(i,k)}^e = -\mathbf{Z}_{ik}^{e'} \sum_{\substack{k'=1 \\ k \neq k'}}^M \mathbf{J}_{(k,k')}^{b'(l-1)} \quad (4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M)$$

このようにして各グループ毎に $M_C = (l-1)(M-1) + 1$ 個、計 $M \times M_C$ 個の CBF が得られるが、これらは必ずしも正規直交基底とはならない。そこで最後に、得られた CBF に Gram-Schmidt の正規直交化法を適用し、CBF の直交性を確保する。

次に、各 CBF の重み係数 $\alpha_{(i,k)}^l$ を求めるため、CBF によって元の行列方程式を以下のように変換する。

$$\sum_{i=1}^M \alpha_{(i,i)}^{l=1} \mathbf{u}_{(i,i)}^{l=1} + \sum_{l=2}^L \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \alpha_{(i,k)}^l \mathbf{u}_{(i,k)}^l = \mathbf{V} \quad (5)$$

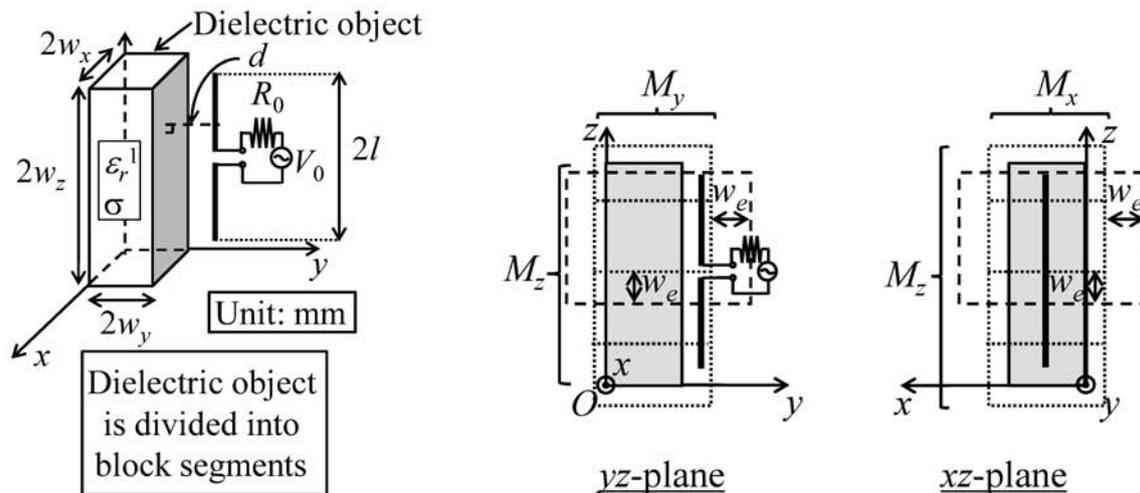
$$(\mathbf{u}_{(i,k)}^l = [[\mathbf{Z}_{1i}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}][\mathbf{Z}_{2i}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}] \cdots [\mathbf{Z}_{Mi}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}]]^T)$$

そしてガラーキン法を用い、(5) 式の両辺と $(\mathbf{u}_{(q,r)}^l)^*$ との内積を取って、元の $N \times N$ 行列方程式を $(M \times M_C) \times (M \times M_C)$ に圧縮する。 $M \times M_C \leq N$ であれば圧縮した行列方程式のサイズは元の行列方程式よりも小さくなるので、Gauss-Jordan 法などを用いることで逆行列を計算して $\alpha_{(i,k)}^l$ を求めることができる。最後に、得られた重み係数と CBF を (1) 式に代入すれば、元の行列方程式の解が求まる。

3 数値解析

3.1 解析モデル

図 2(a) に解析モデルを示す。誘電体はブロックダイポールセグメント及びブロックモノポールセグメントに分割した。図 2(b) に示すように、ブロック各辺の両側を w_e ずつ拡張した範囲に含まれるセグメント数をオーバーラップセグメント数 K_o と定義した。また、ここでは放射問題を取り扱うことにする。



(a) 誘電体近傍線状ダイポールアンテナ. (b) 誘電体近傍線状ダイポールアンテナのブロック分け.

図 2: CBFM のブロック分け

3.2 CBFM の次数と数値解析精度との関係

誘電体近傍線状ダイポールアンテナを従来の CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを、図 3(a) に示す。図 3(a) から、オーバーラップ領域 w_e を広げて CBF の質を上げたとしても、従来の 2 次の CBFM で得られる解は Full-wave とのずれが大きいことが分かる。CBFM で放射問題を数値解析する場合、オーバーラップ領域 w_e を非常に大きくしない限り、給電セグメントを含むブロック以外では Primary basis が 0 になる。放射問題での給電セグメントは 1 つであることが多く、Secondary basis は Primary basis から計算されるので、2 次の CBFM において各ブロックが有する CBF は 1 つだけである。CBFM では、CBF と重み係数との積の重ね合わせで各ブロック内の電流を表現するため、高い精度の解を得るためには複数の CBF が必要である。従って、ほとんどのブロックで Primary basis が 0 となるような放射問題を 2 次の CBFM で数値解析すると、その解は大きな誤差を含む。オーバーラップ領域 w_e を拡大し、全てのブロックで給電セグメントをオーバーラップすれば Primary basis は 0 にならないが、ブロック行列のサイズが大きくなり過ぎてしまい、高速化が図れなくなる。ゆえに、2 次の CBFM を用いて放射問題の解を高い精度で高速に得ることは困難である。

一方、誘電体近傍線状ダイポールアンテナを高次の CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを図 3(b) に示す。4 次以上の CBFM で得られた解は、Full-wave とほぼ一致していることが分かる。3 次以上の高次の CBFM では、各ブロックに複数の CBF が存在し、次数を上げるにつれてブロックあたりの CBF の数も大きくなる。ブロックあたりの CBF の数が大きくなると、ブロック内の電流を表す自由度が増し、解の精度が向上する。従って、高次の CBFM を用いると、ほとんどのブロックで Primary basis が 0 となるような放射問題でも高い精度で数値解析できると言える。

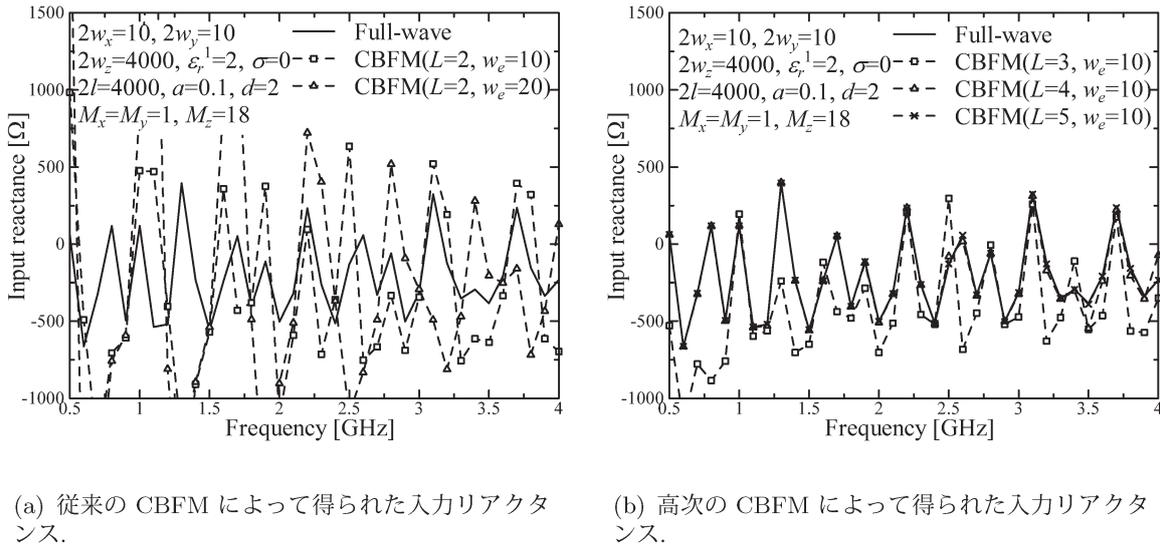


図 3: 誘電体近傍線状ダイポールアンテナの入力リアクタンス

3.3 高次の CBFM の数値解析時間

ここでは、CBFM の次数 L 及びオーバーラップ領域 w_e と、その数値解析時間との関係を明らかにする。誘電体近傍線状ダイポールアンテナを高次の CBFM で数値解析するのに要した計算時間を表 1 に示す。なお、数値解析には Intel Core i-7 3820 CPU を使い、シングルコアで計算を行った。表 1 から、CBFM の次数 L を上げると計算時間が大きくなることが分かる。CBFM の次数 L を上げると、行列方程式を圧縮するのに用いる CBF の数が増え、圧縮後の行列方程式のサイズもより大きくなる。従って、次数 L を上げると、CBF を生成するのに要する時間、行列方程式を圧縮するのに要する時間、圧縮後の行列方程式を解くための時間が大きくなり、CBFM 全体の計算時間が大きくなる。また、オーバーラップ領域 w_e を大きくすると、計算時間が大きくなることが分かる。誘電体近傍線状ダイポールアンテナでは誘電体及びアンテナセグメントが 1 次元方向に分布しているため、 w_e を大きくしてもオーバーラップセグメント数はさほど増えない。従って、オーバーラップ領域 w_e を大きくすることによる計算時間の増加は緩やかである。高次の CBFM と Full-wave の計算時間を比較すると、今回の数値解析例で示した範囲であれば、 L 及び w_e としていずれの値を選択しても Full-wave より高速化が図れることが分かる。

一方、スーパーコンピュータ SX-9(4 並列の ss) で高次の CBFM を実行すると、 $L = 5$, $w_e = 20$ の場合で 1150 秒の時間がかかった。4 並列で数値計算したにもかかわらず、シングルコア CPU の実行時間である 1300 秒に対して計算時間があまり削減できていないことが分かる。その原因として、ベクトル化率を向上させるためのチューニングを今回は施さなかったことにより、ベクトル化率が 30% 程度と低くなったことが考えられる。CBFM には計算機メモリの削減効果がないため、豊富な計算機メモリを使用できるスーパーコンピュータでの実行に適したチューニングは、大規模問題の高速な数値解析を行う上で有効である。従って、CBFM で最も計算時間を要する部分である

表 1: 高次 CBFM の数値解析時間.

Methods	Size of reduced/ original matrix	CPU time [sec.]		
		$w_e = 0$	$w_e = 10$	$w_e = 20$
CBFM($L = 2$)	18×18	119	205	236
CBFM($L = 3$)	263×263	339	377	431
CBFM($L = 4$)	525×525	638	719	797
CBFM($L = 5$)	785×785	1041	1191	1301
Full-wave	7235×7235	16632		

ガウス消去法の部分をベクトル化に適した形にチューニングし, CBFM の高速化を図ることが今後の課題である.

4 むすび

本報告では, 一般的な高次の CBFM を提案した. そして, 高次の CBFM を用いて誘電体近傍アンテナの数値解析を行い, CBFM の次数及びオーバーラップ領域の大きさと, 解の精度及び計算時間との関係を明らかにした. CBFM によって得られる解の精度は, CBFM の次数が高く, オーバーラップ領域が大きいほど良くなることが分かった. その一方で, CBFM の次数が高く, オーバーラップ領域が大きいと計算時間がかかるため, CBFM の次数とオーバーラップ領域は最適な値にする必要があることも分かった. 今後は, ベクトル型スーパーコンピュータでの実行に適した形へのチューニングを高次の CBFM のプログラムに対して施し, 高速化を図ることが課題である.

謝辞

本研究は, 東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータ SX-9 を利用して行われたものである. 関係各位に深く感謝する.

参考文献

- [1] V.V.S. Prakash and R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol.36, no.2, pp.95-100, Janu. 2003.
- [2] S.G. Hay, J.D. O'Sullivan, and R. Mittra, "Connected patch array analysis using the characteristic basis function method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.59, no.6, pp.1828-1837, June 2011.