

[共同研究成果]

チャンネル内遷移流に発現する乱流縞の計算領域依存性に関する DNS 解析

塚原 隆裕* 金子 士津真** 川口 靖夫*

* 東京理科大学 理工学部 機械工学科

** 東京理科大学大学院 理工学研究科 機械工学専攻

本研究では遷移レイノルズ数域の平行平板間流で観測される縞状の間欠的乱流場に注目し、直接数値シミュレーションによる系統的な調査から、その特性を明らかにした。主流方向に対するスパン方向の計算領域サイズ（アスペクト比）を 0.3~1.0 まで変化させ、乱流縞の計算領域依存性について報告する。また、乱流エネルギーの輸送方程式より、乱流域と準層流域の各領域にてエネルギーフローを調べた。結果、乱流縞はある程度定まった角度で安定化することと、乱流エネルギーは乱流域と準層流域の両領域で生成され、領域間ではエネルギーの授受がないことを見出した。

1. 序論

水資源豊かなこの地球環境では、様々な形態や状態でありなす「流体の流れ」が数多く発生している。水圏では海洋の循環流れとしての潮流や河川の流れなど、気圏では大気の循環流れとして貿易風や偏西風、または身近に感じる空気の流れとして季節風や単なる風も「流れ」の例として挙げられる。産業分野では、熱や物質の輸送を目的とした流れの利用は多岐にわたり、例えば、石油輸送のためのパイプライン、地域冷暖房設備や上下水道の配管設備などである。これらの我々の身の回りで起きている「流れ」は乱流状態にあることが多い。乱流化すると流れは大小様々な渦を含むようになり、それら渦運動が大規模な混合を助けるようになる。効率的な熱除去や物質混合を要する場面においては、乱流の強い拡散性・混合性が有効であり、熱交換器の伝熱促進やエンジン内の燃焼加速を促すために乱流は積極的に利用されてきた。一方、流体摩擦の点では、乱流は摩擦を増加させる側に働く阻害要因となる。さらに乱流は強非線形現象であるため、予測をすることが困難である。これに対して、予測が比較的容易で秩序だった流れを層流というが、上記の乱流と相反する特徴を有する（つまり、層流では効率的な物質拡散や混合、または熱伝達が見込めない。しかしながら、壁面摩擦が乱流に比べて顕著に小さいため、ポンプ駆動力の低減や省エネルギーに繋がる）。近年では、マイクロ熱交換器や高密度電子機器の冷却装置などの小型化が進む中、流れの低レイノルズ数化に伴う熱伝達特性の低下が問題となっている。または、流体の高い出口温度を得ることを意図した場合に、流路内の平均流速が遅く設定されるために再層流化が懸念される。層流への逆遷移が起きると熱伝達率が顕著に悪くなるため、目標の出口温度が得られず、機器の安全性も損なってしまう。このような工学的背景に鑑み、乱流と層流間の中間的状态（遷移域）の流れ場を解析し、流動特性や特徴的な乱流構造の解明を本研究の目的としている。解析対象となる流れ場は、図 1 に示すように、圧力勾配によって平行平板間（チャンネル）を流れる平面ポアズイユ流である。これは規範的な流れ場の一つであり、壁乱流についての一般的な知見を得る際に、しばしば研究対象とされている。

乱流は古くから数多くの研究が行われており、乱雑な流れの中にも統計的普遍性や準秩序的構造を有することが明かされてきた。しかし、未だに解明されていない極めて重要な問題も残されており、上記の乱流から層流への逆遷移過程もその一つである。乱流現象の解明には多方面からのアプローチがあり、理論的・実験的研究がこれまで大きな成果を上げてきた。大型コンピュータの飛躍的な進歩により、数値流体力学（CFD: Computational Fluid Dynamics）も現象予測のみならず、乱流の基礎研究において大きく貢献している。最近では計算手法も確立されてきており、乱流の直接数値シミュレーション（DNS: Direct Numerical Simulation）が数多く行われるようにな

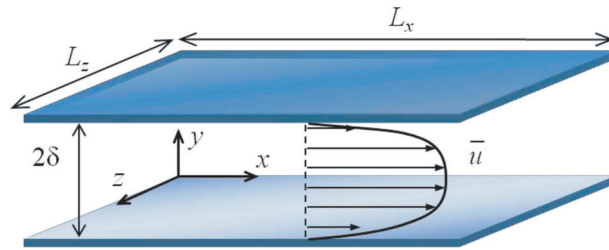


図1 解析対象の平行平板間流路の模式図.

った. DNS は, 支配方程式をモデル化せずに直接解く手法である. DNS から得られる信頼性の高い解析結果やデータベースは実験と比較され, また乱流モデルなどに広く応用されている.

層流への逆遷移付近の比較的低いレイノルズ数におけるチャンネル内遷移流の DNS としては, Iida & Nagano [1] が 1998 年にスペクトル法を用いて行っている. 通常, チャンネル乱流の DNS では, 無限平板を模擬するために有限の計算体積の主流方向 (x) とスパン方向 (z) に周期境界条件を用いるが, その計算領域サイズとして彼らは $(L_x \times L_y \times L_z) = (5\pi\delta \times 2\delta \times 2.5\pi\delta)$ で解析している. これにより比較的小さいスケールの乱流構造は十分に捉えられ, 低レイノルズ数効果について詳しく調査をしている. この時のレイノルズ数は壁面摩擦速度 u_τ , チャンネル半幅 δ , および動粘性係数 ν で無次元化された摩擦レイノルズ数に基づいて $Re_\tau = 60$ であるが, 後述の乱流縞について観測された報告はされていない. その後, Tsukahara ら [2-5] により $Re_\tau = 56 \sim 150$ において大規模な計算領域を用いた DNS が実施され, 新たな乱流の準秩序的構造を発見した. レイノルズ数を遷移域 ($Re_\tau = 56 \sim 80$) まで下げると, 図 2 で見るように乱流域が縞状の空間的間欠性を呈し, 主流方向に対して一定角度で傾斜した構造をとることを見出した. これは水平方向の計算領域を従来のものより 10~100 倍の面積に拡大したことにより, $Re_\tau < 80$ において, 過去の研究では捉えることの出来なかった大規模スケールの構造を捉えたものである. この構造を「乱流縞 (turbulent stripe)」と呼んでいる. 乱流縞は乱流域が主流方向に対して規則的な角度 ($20^\circ \sim 30^\circ$) を保ち, 平面ポアズイユ流では構造が平均流の影響で下流へと伝播する. 平面クエット流においても遷移レイノルズ数域で乱流縞が発生することが知られている [6-9]. しかしながら, 乱流縞の形成メカニズムは依然として未解明である.

DNS を含めて数値シミュレーションでは, 必ず「計算領域サイズ」と「捉える乱流構造のスケール」の双方に注意をして実行しなくてはならない. 本研究でも周期境界条件を適用しているため, 擬似的に無限に広い平行平板間流れを想定しているが, 理論上は計算領域より大きいスケールの構造を捉えることは不可能である. つまり, 計算領域より大きいスケールの構造は減衰してしまうため, 前述のように, 計算領域が不十分なサイズであると, 流体現象の本来生じるべき構造 (乱流縞など) を捉えられず, 非物理的 (非現実的) な流れが数値解となってしまいう可能性がある. しかし, 乱流縞においては図 2 に示されるように, 元来, 主流方向とスパン方向に周期性を有するため, この波長に基づいた計算領域を設定することで, 任意の本数の乱流縞のパターンを再現することができる.

本研究では, 計算領域を変化させることにより乱流縞の計算領域依存性について調査する. また, 乱流エネルギーの輸送方程式により, 乱流域と準層流域の各領域におけるエネルギーフローを調べ, 乱流縞の形成メカニズムについて検討した.

2. 解析手法

2.1 解析対象

解析対象となる流れ場は, 非圧縮性ニュートン流体における平行平板間ポアズイユ流である (図 1 参照). 境界条件として, 壁面上では滑り無しとし, 主流方向及びスパン方向に周期境界条件を

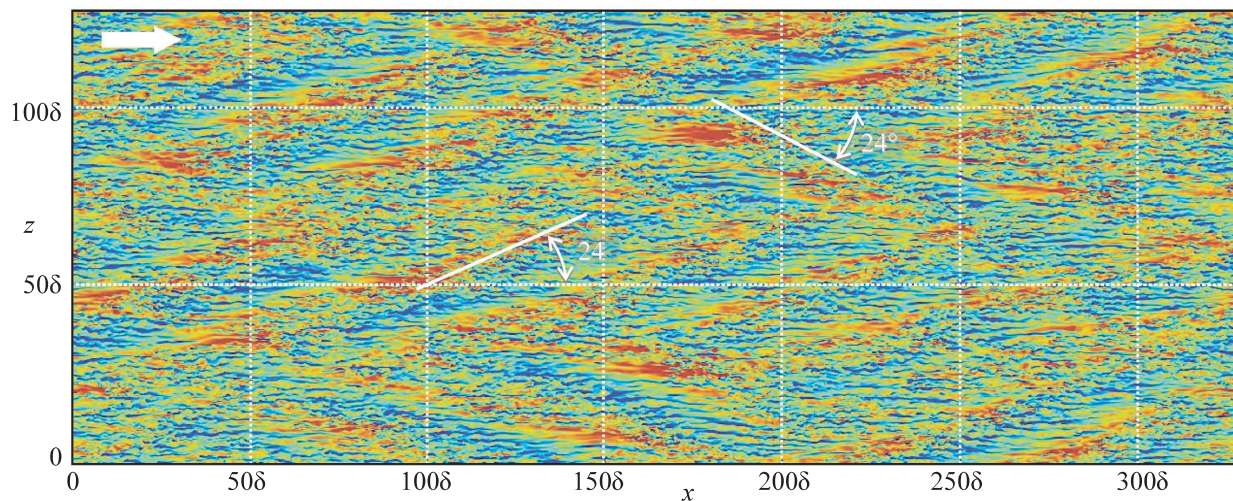


図2 大規模計算領域で捉えられた $Re_\tau = 80$ における縞状の空間的間欠性をもつ乱流場（乱流縞）の可視化. 高さ $y = \delta/2$ での水平面内における瞬時主流方向速度変動のコンター（赤, $u^+ > 3$; 青, $u^+ < -3$ ）を示す. 平均流は右向き.

適用している. 主流方向に圧力勾配一定条件を課しているため, 平均流量の時間変動を生ずるが, 統計的定常な状態に達してから各種平均量や瞬時場の抽出を行った.

2.2 支配方程式

流体の運動を記述する支配方程式として, 連続の式と運動量方程式を用いる. モデル化せず, 数値的に直接解くことで流れを忠実に再現する.

- 連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

- 運動量方程式 (Navier-Stokes 方程式)

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^*} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^+}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^{*2}} \quad (2)$$

ここで, 三次元直交座標系とし ($i = 1 \sim 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$), u_i は速度, p は圧力, t は時間を表す. 上添え字の (+) は u_τ 及び v で無次元化された物理量であり, (*) については δ を用いて無次元化されていることを示す.

2.3 計算手法

式(1), (2)のカップリングには Fractional-step 法を用いた. 時間積分には, 対流項, 粘性項 (x 及び z 方向) に二次精度 Adams-Bashforth 法, 粘性項 (y 方向) に二次精度 Crank-Nicolson 法を適用した. 空間的離散化には x 方向と z 方向に四次精度中心差分を, y 方向には二次精度中心差分を適用した.

2.4 計算条件

レイノルズ数は $Re_\tau = 80$ とした. 本研究では計算領域のスパン方向の長さを変化させることにより乱流縞の発生限界角度を調査する. ただし, 主流方向の領域サイズは変化させず, $L_x = 51.2\delta$

表1 スパン方向の計算領域サイズ (L_z), 1本または2本の乱流縞を形成する場合の発生予測角度 (θ_1, θ_2), 及び乱流縞の観測結果 (P, 平行型の乱流縞が発生; N, 非平行な乱流縞).

	Case 1	Case 2	Case 3	Base	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7	Case 8
L_z	10.24 δ	15.36 δ	20.48 δ	25.6 δ	30.72 δ	35.84 δ	40.96 δ	46.08 δ	51.2 δ
θ_1	11.3°	16.7°	21.8°	26.6°	31.0°	35.0°	38.7°	42.0°	45.0°
θ_2	—	—	—	—	16.7°	19.3°	21.8°	24.2°	26.6°
Stripe	N	P	P	P	P	N	N	P	N

表2 プログラム性能 (SX-9, p16 利用時). 総格子点数は約 8 億点 (4096 × 96 × 2048).

CPU 時間 [h:m:s]	743:35:03	プロセッサ同時実行時間	
MOPS 値	54,502	Conc. Time (≥ 1) [sec]	167652.38
MOPS 値 (実行時間換算)	870,239	Conc. Time (≥ 2) [sec]	167644.03
MFLOPS 値	27,793	Conc. Time (≥ 4) [sec]	167643.90
MFLOPS 値 (実行時間換算)	443,773	Conc. Time (≥ 6) [sec]	167643.86
平均ベクトル長	255.96	Conc. Time (≥ 8) [sec]	167643.82
ベクトル換算率 [%]	99.77	Conc. Time (≥ 12) [sec]	167643.64
メモリサイズ [GB]	187.19	Conc. Time (≥ 16) [sec]	162787.69

で一定とする. スパン方向サイズ $L_z = 25.6\delta$ を標準 (Base) として, 計算領域を縮小させた場合 3 ケース (Case 1~3) と拡大した場合 5 ケース (Case 4~8) の計 8 ケースを調べた. スパン方向長さの変化量は等間隔に 5.12 δ 毎に変化させ, 一番大きいケースで Base の計算領域の二倍となっている. 表 1 に解析を行った 8 ケースについて示す. 表中の θ_1, θ_2 はそれぞれ計算領域内に乱流縞が一本もしくは二本発生した場合の角度を表している. 例えば, θ_1 は $\tan^{-1}(L_z/L_x)$ に相当する.

2.5 プログラム性能

本計算はノード内並列計算のため OpenMP が実装されている. 計算コードは既報[5] のものとほぼ同一であり, 計算性能も同程度である. 一例として, 図 2 の大規模な計算領域について解析した際のプログラム性能を, Proginf の結果から抜粋して表 2 に示す. ここでは 10 万ステップ分の性能を示すが, 実際には初期条件から十分に発達した流れ場を得るまでに約 100 万ステップ分の計算を要している. 表 2 より, ベクトル長及びベクトル換算率ともに各理論上限値に近く, ベクトル処理が効率的に行われていることが分かる. プロセッサ同時実行時間から判断して, 全プロセッサ (16CPU) による並列計算に対して大半の計算時間を費やしており, 高効率な並列処理も実現されている. また, 1 CPU 当たり約 27 GFLOPS の高い実効性能を得ている.

3. 結果及び考察

3.1 計算領域変化に伴う構造の変化

図 3 に計算領域をスパン方向に縮小させた場合 (Case 2~3) の結果を示す. 比較のため, 基準となる計算領域 (Base) の結果も合わせて示す. ここでは, 赤い領域が高速ストリーク, 青い領

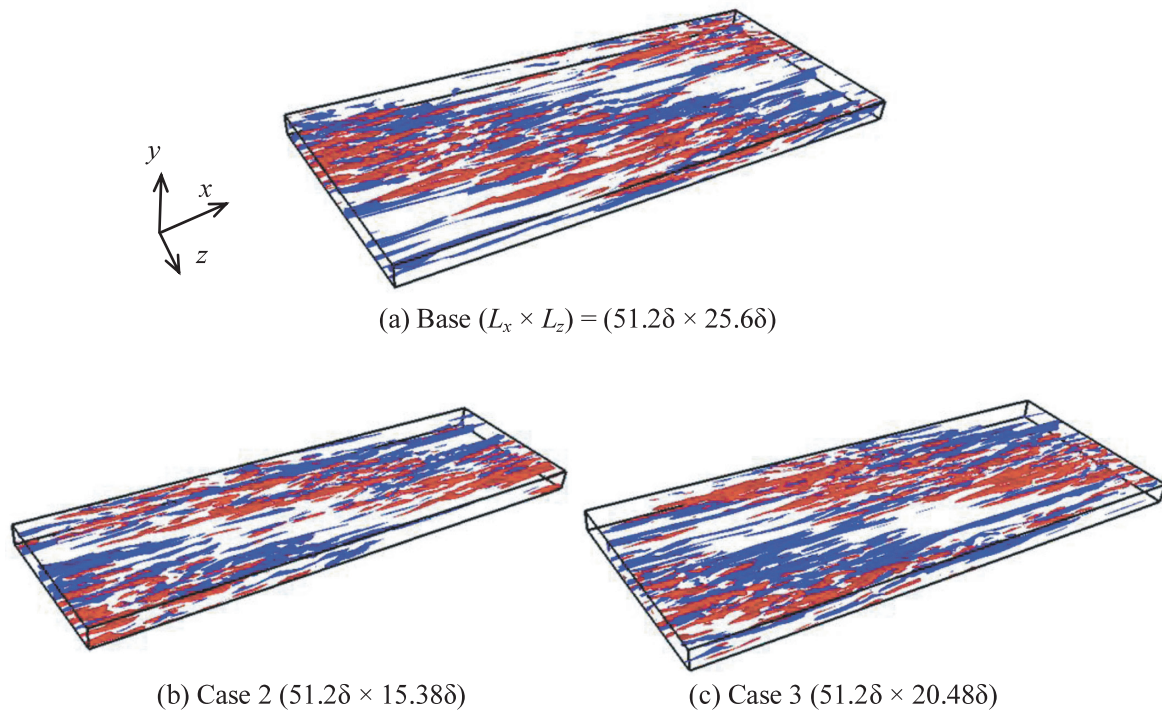


図3 乱流縞の計算領域依存性 ($L_x : L_z = 1:0.3 \sim 0.5$). 遷移レイノルズ数域 ($Re_\tau = 80$) にあるチャンネル乱流の流れ場の三次元可視化. 赤と青の等値面はそれぞれ高速領域 ($u^+ > 4$) と低速領域 ($u^+ < -4$) を示す. 平均流は左下から右上に向かって流れている. 見易さのため, 下壁側半分 ($y < \delta$) のみを可視化.

域が低速ストリークを表している. 可視化図から分かるように, 高速ストリークと低速ストリークの群れが計算領域に対して縞状に分布し, つまり速度乱れが間欠的に発生していることが確認できる. Case 2 においても乱流縞を維持することから, 過去の DNS や実験[4]で確認されていた乱流縞の角度 ($20^\circ \sim 30^\circ$) より小さい角度でも発生し得ることを示唆している. このことから, 乱流縞を発生させるための最小スケールはおよそ $\lambda_z = 15\delta$ ($\lambda_z^+ = 1200$) であると言える. Case 1 では, 縞構造が崩れて斑点状の構造が発生する (図は非掲載). これは, 流れが層流から乱流へ遷移する初期段階によく見られる乱流斑点に酷似している. つまり, Case 1 では乱流縞が発生しなくなることから, 乱流縞の角度が主流方向に対して 15° 以下では構造を維持できなくなることが示された.

計算領域を拡大した場合 (Case 4~8) の結果を図4に示す. 図4(b)のCase 4では, Case 2及びCase 3と同様に計算領域の対角方向に一本の乱流縞が発生していることが確認できる. これを, 便宜上ここでは“平行型の乱流縞”と言う. 図4(c), (d)に示すCase 5とCase 6の場合は, 共に高速ストリーク群が低速ストリークによって分断され平行型の乱流縞を維持できなくなっている. ここで明らかに計算領域の対角方向に発生していた乱流縞の構造が崩れた. これは高速ストリーク群が低速ストリークによって分断されていることから, 低速ストリークの影響で乱流縞が平行型から主流方向に尖ったV字型になったと考えられる. 図4(e)を見ると, 再び明確な平行型の乱流縞がCase 7において発生することが確認できる. しかし, Case 4と異なり, 計算領域の対角方向に対して一本ではなく, 計算領域内に二本の乱流縞が発生している. つまり, Case 7のスパン方向の長さが乱流縞のスパン方向スケールの分岐点といえる. これより角度を算出すると, 乱流縞の傾斜角度は 24.23° であり, 一般的な乱流縞の傾斜角度の範囲内に収まる. スパン方向の乱流縞の間隔を見てみると $\lambda_z = 23\delta$ ($\lambda_z^+ = 1840$) である. 図4(f)のCase 8では, 再び平行型が一部で

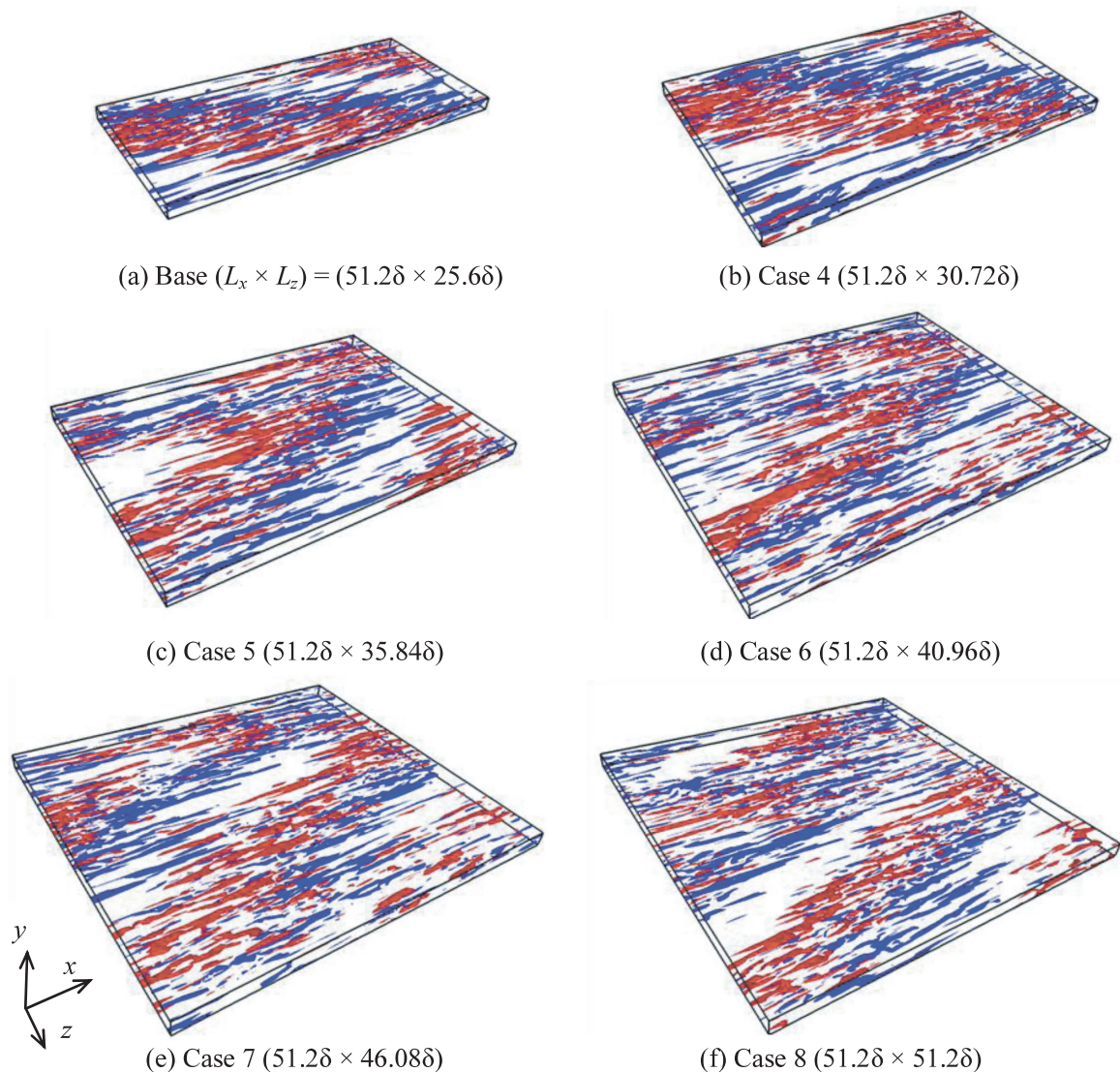


図4 乱流縞の計算領域依存性 ($L_x : L_z = 1:0.5 \sim 1$)。可視化の詳細は図3と同様。

崩れたような分布となる。つまり，計算領域内に複数本の乱流縞を捉え得る場合，その乱流縞はレイノルズ数が一定ならばある程度定まった角度で発生し，安定することが分かる。

上記のスパン方向計算領域を変化させたときの乱流縞の形状変化について，表1に結果をまとめた。Case 5, 6, 8では平行型の乱流縞が崩れ主流方向へ尖ったV字型の乱流縞を形成する。V字型の乱流縞が形成される際，対角方向に一直線状に並んでいた高速ストリーク群が低速ストリークによって分断され，平行型の乱流縞ではなくなる。次に，Case 3とCase 6や，BaseとCase 8を比較する。これらの関係はちょうど前者の計算領域を二倍すると後者の領域と一致する。その結果，計算領域が小さい場合には平行型の乱流縞を形成していたが，二倍の計算領域では自由度が増したためか，二本の平行型の乱流縞が発生するのではなく崩れた形状の乱流縞を呈する。このことから，BaseやCase 3は本質的な乱流縞ではなく，計算領域の制約を受けて直線状に発生してしまっていると考えられる。しかし，Case 6とCase 8の間のCase 7では二本の平行型の乱流縞を捉えられていることから乱流縞の本質的な発生角度を求めることが出来る。つまり，乱流縞は $21.8^\circ < \theta < 26.6^\circ$ の範囲で発生し安定化すると考えられる。今回の結果より， $Re_\tau = 80$ における乱流縞の発生角度は約 24° であると言える。

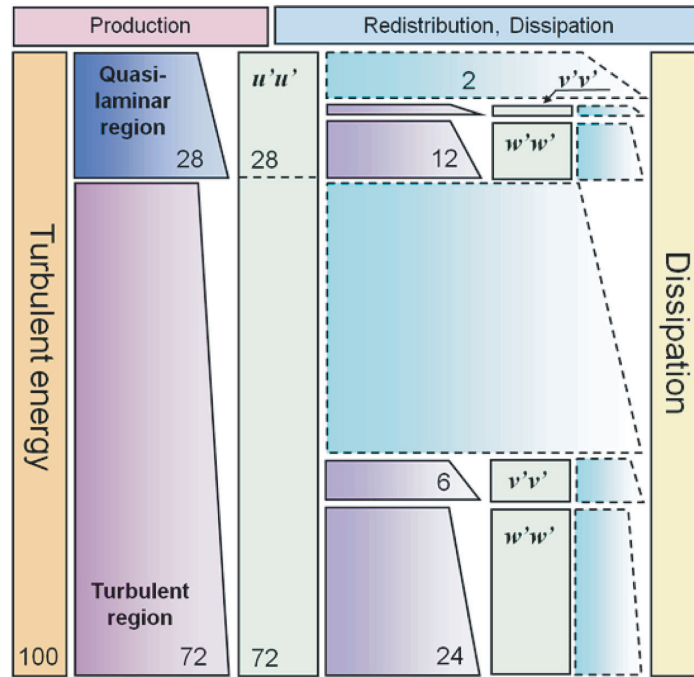


図5 乱流縞における乱流エネルギー輸送プロセスの概略図. 流れ場全域で生成される乱流エネルギー量を100%とし、生成(図中、青または赤で表記)～再配分(紫色)～散逸(水色)までの過程を示す.

3.2 乱流エネルギーの輸送機構

乱流エネルギーは次式のように定義される.

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \quad (3)$$

このように、主流方向、壁面垂直方向、スパン方向の各方向速度変動の二乗平均の総和で表すことができる. また、乱流エネルギーの $\overline{u'u'}$ 成分についての輸送方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial t} &= -2\overline{u'u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2} + 2\overline{p' \frac{\partial u'}{\partial x}} - \frac{\partial \overline{u'p'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'u'u'_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u'u'}}{\partial x_j^2} \\ &= P_{11} - \varepsilon_{11} + \Phi_{11} + \Pi_{11} + T_{11} + D_{11} \end{aligned} \quad (4)$$

と導かれ、右辺第一項から生成項、散逸項、圧力歪相関項(再配分項)、圧力拡散項、乱流拡散項、そして分子拡散項である. 但し、式(4)の各項は νu_τ^4 で無次元化されている.

前述の Base における解析結果に基づいて、図5に乱流エネルギーのフローを示す. この図は、生成した乱流エネルギーがどのような経路を辿って散逸していくかを示している. 生成した乱流エネルギー量の空間的総和($\iiint P_{11} dV$)を100%とする. まず、主流方向成分 $\overline{u'u'}$ の生成項によって平均流から乱れ成分へと運動エネルギーが変換されるが、乱流域で72%、準層流域では28%程度の乱れ生成が行われている. 各領域で生成されたエネルギーは、お互いの領域で交換することなくそれぞれの領域内で輸送される. 乱流域に注目すると、圧力歪相関項 Φ_{11} の働きによりスパン方向 $\overline{w'w'}$ に

24%, 壁垂直方向成分 $\overline{v'v'}$ に 6% だけ再配分され、それ以外のエネルギーは直接に（各種拡散項による壁垂直方向への輸送を伴いつつ）散逸する．準層流域では、スパン方向成分に 12%, 壁垂直方向成分に 2% ほど再配分されている．主流方向成分からスパン方向成分や壁垂直方向へエネルギーが再配分される割合は、それぞれの領域における $\overline{u'u'}$ の生成エネルギー量に対して、スパン方向成分には約 30%, 壁面垂直方向成分には約 8% である．このことから、各成分で生成されるエネルギーは乱流域のほうが大きい、発生後に他成分へ再配分されるエネルギー割合はどちらの領域も同じくらいであると言える．さらに、乱流域では生成されるエネルギー量が多いことから、他成分へ多くのエネルギーが再配分されるので乱流状態を維持するが、準層流域では生成されるエネルギー量が少ないために乱れが抑えられていると考えられる．

4. 結論

本研究では、平行平板間ポアズイユ流で発現する乱流縞の計算領域依存性について、DNS を行った．レイノルズ数は、乱流縞が観測される遷移レイノルズ数域内の $Re_\tau = 80$ に設定した．計算領域を変化（主流方向サイズは $L_x = 51.2\delta$ で一定）させることにより乱流縞の形状が変化し、構造が最も安定して発生するスケール及び角度を調べ、以下の知見を得た．

- 計算領域に対して乱流縞が一本捉えられている場合は、スパン方向計算領域サイズに従い乱流縞の波長も比較的柔軟に変化する．
- スパン方向計算領域が $L_z = 10\delta$ 程度まで小さすぎると乱流縞を維持できず、構造が崩壊し斑点状の構造が現れる．
- スパン方向計算領域を拡大して $L_z = 35\delta$ を超えると、高速ストリーク群や低速ストリーク群が一直線状に並ぶことができなくなる．このとき、低速ストリーク群によって高速ストリーク群が分断されるため一直線状に並ばなくなる．
- スパン方向計算領域を $L_z = 46\delta$ まで拡大すると、領域内に二本の平行な乱流縞を捉えることができ、そのときの乱流縞の傾斜角度は $\theta = 24^\circ$ である．
- 乱流エネルギーは乱流域と準層流域の両領域で生成されており、総量の 7 割が乱流域、3 割が準層流域で発生している．また、それぞれの領域間ではエネルギー授受は行われず、各々の領域内でエネルギーが生成され、最終的には散逸する．
- 圧力歪相関項の働きによって壁面垂直方向成分やスパン方向成分に再配分されるとき割合は両領域において同じ比率である．

以上より、計算領域を変化させた事により安定して乱流縞が発生するスケールを求めることができ、その角度はレイノルズ数が一定の場合にある程度定まった角度（本研究のレイノルズ数では約 24° ）であることが分かった．この傾向は、過去の実験 [4,6] や DNS [3,8] による観測結果とも良く一致している．

謝辞

本研究における DNS は東北大学サイバーサイエンスセンターの大規模科学計算システムを利用して実行されたものであり、同センターのご協力を頂いたことに謝意を表す．また、本研究の遂行にあたり科学研究費補助金（#20860070, #22760136）の助成を受けた．

参考文献

[1] Iida, O. and Nagano, Y., “The relaminarization mechanisms of turbulent channel flow at low Reynolds

- numbers,” *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 60, 193–213, 1998.
- [2] Tsukahara, T., Seki, Y., Kawamura, H., and Tochio, D., “DNS of turbulent channel flow at very low Reynolds numbers,” In: *Proceedings Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Williamsburg, VA, USA, Jun. 27–29, pp. 935–940, 2005.
- [3] Tsukahara, T. and Kawamura, H., “Turbulent heat transfer in a channel flow at transitional Reynolds numbers,” In: *Proceedings of the First Asian Symposium on Computational Heat Transfer and Fluid Flow*, Xi’an, China, Oct. 18–21, (CD-ROM) ASCHT2007-055, 8 pp., 2007.
- [4] Tsukahara, T., Kawaguchi, Y., Kawamura, H., Tillmark, N., and Alfredsson, P. H., “Turbulence stripe in transitional channel flow with/without system rotation,” In: *Proceedings of the Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, Stockholm, Sweden, Jun. 23–26, IUTAM Bookseries, Vol. 18, Springer, pp. 421–426, 2009.
- [5] 塚原隆裕, 會田紘史, 川口靖夫, “平行平板間流れにおける乱流斑点の発達に関する DNS 解析”, *東北大学サイバーサイエンスセンター・大規模科学計算システム広報 SENAC*, Vol. 43, No. 3, pp. 9–17, 2010.
- [6] Prigent, A., Grégoire, G., Chaté, H., Dauchot, O., and van Saarloos, W., “Large-scale finite-wavelength modulation within turbulent shear flows,” *Physical Review Letter*, Vol. 89, 014501, 2002.
- [7] Barkley, D. and Tuckerman, L.S., “Mean flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 576, 109–137, 2007.
- [8] Duguet, Y., Schlatter, P., and Henningson, D. S., “Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 650, 119–129, 2009.
- [9] Tsukahara, T., Tillmark, N., and Alfredsson, P. H., “Flow regimes in a plane Couette flow with system rotation,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 648, 5–33, 2010.