

[共同研究成果]

CG-FMM による板状導体の電磁界解析

陳 強, 今野 佳祐, 澤谷 邦男

東北大学大学院 工学研究科 電気・通信工学専攻

1 まえがき

モーメント法 (Method of Moments: MoM) は, 電磁界の数値解析手法としてよく用いられる. モーメント法は, アンテナと散乱体の導体表面上で成り立つ電磁界の境界条件から得られる積分方程式を行列方程式に変換し, さらに行列方程式を解くことにより導体表面を流れる散乱電流を求める手法である [1]. 行列方程式の解き方として, ガウス消去法や掃き出し法などの直接法がある. しかし, $N \times N$ の行列方程式を直接法を用いて解くと, 計算時間とメモリがそれぞれ N^3 と N^2 に比例して急速に増加するようになる. そのため, 電氣的に大きなアンテナや, 散乱体などを含む大規模な電磁界の数値解析にモーメント法を適用する場合は, 膨大なコンピュータ計算時間とメモリが必要となる.

この問題を克服する手法として, 行列方程式の解法に CG (Conjugate Gradient) 法を用い, CG 法における行列-ベクトル積の計算に FMM (Fast Multipole Method; 高速多重極法) を用いる CG-FMM が提案された [2]-[3]. また, CG-FMM に分割統治法の考え方を応用して多層化した MLFMA (Multi-Level Fast Multipole Algorithm) は, 大規模問題の解析に用いられている [4].

私どもの研究グループは, 2010 年度にサイバーサイエンスセンターとの共同研究で宇宙太陽発電システム用大規模アレーアンテナの数値解析に関する研究を行っている. これまでの研究では, アレーアンテナの周期構造を考慮した CG-FMM を提案し, 1 万素子規模の大規模線状アレーアンテナの数値解析を実現した [5]. しかしながら, 実際のアンテナは, 単純な線状構造ではなく, 板状導体を含むパッチアンテナの構造が用いられる. 板状導体上の電流は 2 次元的に分布するため, 電流分布を表わすモーメント法の展開関数の数 (= 未知数の数) も 2 次元的に配置する必要がある. そのため, 面状散乱体のモーメント法解析は, 線状導体の解析より未知数の数が多く, 更なる大規模の数値解析が必要になる. 本報告では, CG-FMM を用いて板状導体のワイヤグリッドモデルの平面波散乱問題を解析し, CG-FMM の計算パラメータと計算時間及び計算機メモリの関係を検討したので報告する.

2 CG-FMM の手順

2.1 CG 法

モーメント法によって得られた行列方程式を $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ とする. ここで, \mathbf{V} は既知の入射電圧ベクトル, \mathbf{Z} は既知の $N \times N$ インピーダンス行列, \mathbf{I} は未知の散乱電流ベクトルである. 行列方程式に対する CG 法のアルゴリズムの概要は以下の通りである.

1. 電流ベクトル \mathbf{I} の初期値を \mathbf{I}_0 として, 残差ベクトル \mathbf{r} 及び解の修正ベクトル \mathbf{p} の初期値 \mathbf{r}_0 及び \mathbf{p}_0 をそれぞれ以下のようにして求める.

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{Z}\mathbf{I}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{r}_0 \quad (2)$$

2. 残差ベクトルの大きさ $\|\mathbf{r}_i\|$ が十分小さくなるまで反復処理

$$\alpha_i = -\frac{\langle \mathbf{Z}\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_{i-1} \rangle}{\|\mathbf{Z}\mathbf{p}_i\|^2} = \frac{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{r}_{i-1}\|^2}{\|\mathbf{Z}\mathbf{p}_i\|^2} \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}_i \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{Z}\mathbf{I}_i - \mathbf{V} = \mathbf{r}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{Z}\mathbf{p}_i \quad (5)$$

$$\beta_i = \frac{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{r}_i\|^2}{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{r}_{i-1}\|^2} \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{r}_i + \beta \mathbf{p}_i \quad (7)$$

を行う。ここで、 α_i と β_i はそれぞれ \mathbf{I}_{i-1} と \mathbf{p}_{i-1} の修正係数であり、 \mathbf{Z}^\dagger は \mathbf{Z} の共役転置行列である。また、 ϵ は解の誤差調整パラメータであり、 $\epsilon = 10^{-4}$ とすれば N が数千から数万程度までは十分な精度の解が得られることが分かっている。

上述のアルゴリズムでは、反復処理 1 回当たり 2 回の行列-ベクトル積が行われ、その計算時間は $O(N^2)$ である。また、 \mathbf{Z} を保存するための計算機メモリも $O(N^2)$ となる。しかしながら、以下の FMM を利用すると行列-ベクトル積の計算時間及び必要な計算機メモリをどちらも最大で $O(N^{1.5})$ まで減らすことができる。

2.2 FMM

図 1 に示すように、FMM ではグリーン関数の加法定理 [2], [6] を利用して、CG 法の行列-ベクトル積のうち遠方にあるセグメントとの間の相互インピーダンス行列と電流ベクトル \mathbf{I} との積をグループ単位でまとめて計算する。まとめるときの計算時間及び必要な計算機メモリは、多重極数 L とグループ数 M 、及びグループ中のセグメント数 K によって

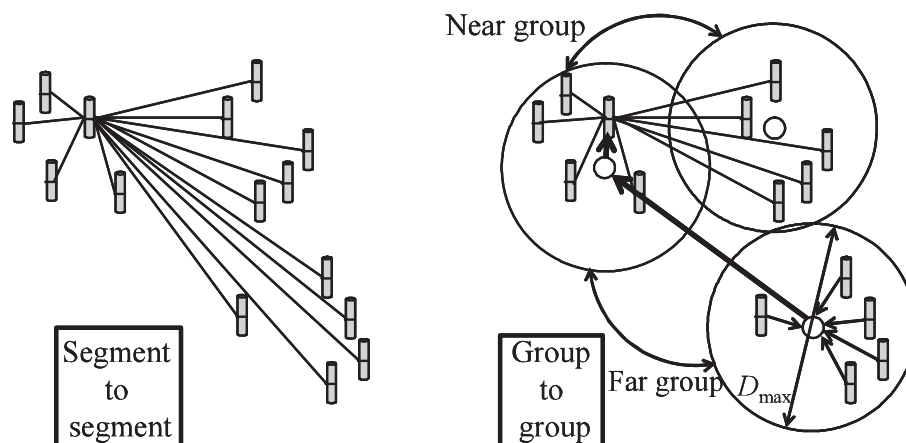


図 1: FMM におけるグループ化.

決まることが分かっている. 多重極数 L はグループの直径の最大値 D_{\max} に比例する値として,

$$L = k_0 D_{\max} + \alpha_L \ln(k_0 D_{\max} + \pi) \quad (8)$$

で与えられる経験式が得られている. ここで, α_L は誤差調整パラメータであり, 通常 $0 \sim 10$ の値が用いられ, $\alpha_L = 2$ とすれば散乱パターンや電流分布は十分な精度で求められることが分かっている. 解析モデルが 2 次元的な広がりを持つ場合 (板状アンテナ, 板状散乱体など), 多重極数 L と各グループに含まれるセグメント数 $K (= N/M)$ との関係は $L^2 \propto K$ となることが知られている. この場合, 解析に要する計算時間と計算機メモリは総セグメント数 N とグループ数 M のみを用いて

$$\text{CPU time, computer memory} = O(MN + N^2/M) \quad (9)$$

で表される. (9) 式においてグループ数 M を $M = \sqrt{N}$ とすると計算時間及び計算機メモリが最小の $O(N^{1.5})$ となる. しかしながら, 解析モデルの形状やセグメントの分布の仕方によっては $M = \sqrt{N}$ という最適なグループ分けができない場合もある. また, プログラム中で解析モデルやグループ配置の周期性を利用した場合, 計算時間や計算機メモリが最小になるグループ数 M が $M = \sqrt{N}$ と異なる場合もあり得る. 従って, グループ数に対する計算時間及び計算機メモリの変化を確かめるため, グループ数 M を変化させたときの計算時間とメモリについて検討した.

3 CG-FMM による板状導体の解析

CG-FMM を用いて, 図 2 に示す板状導体のワイヤグリッドモデルの平面波入射問題を解析した. 解析の各パラメータは表 1 に示す. 板状導体の寸法と線状セグメントへの分割及び総セグメント数 N を固定し, グループ数の違いが計算時間及び計算機メモリに及ぼす影響を検討した. また, 多重極数 L を決定するパラメータ α_L , 及び反復回数を決定するパラ

メータ ϵ も固定した。散乱パターンの解析結果の一例を図3に示す。Gauss-Jordan 法やCG法によって行列方程式を解いて得られた電流分布から求めた散乱パターンと、CG-FMMによって得られた電流分布から求めた散乱パターンはよく一致した。

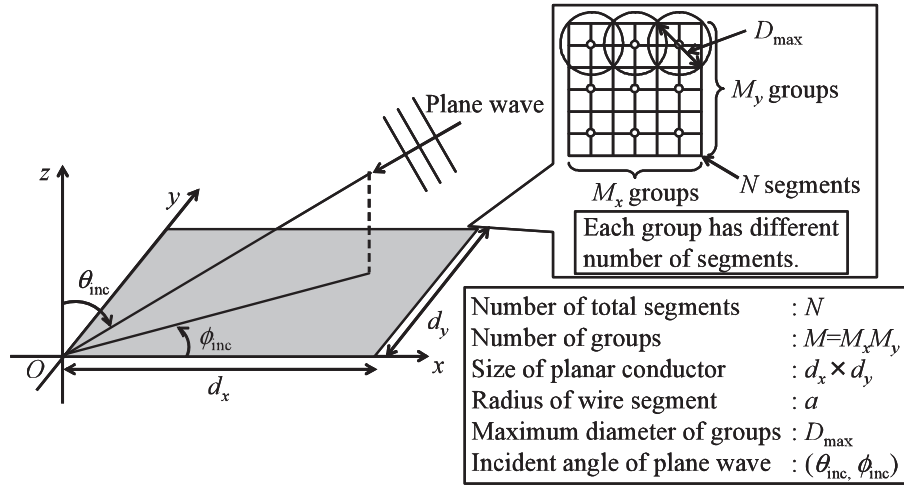


図 2: 板状導体による平面波入射の散乱

表 1: 解析諸元.

Number of total segments N	4879
Number of cubes (M_x, M_y, M_z)	$M_x = M_y = 2 \sim 17$ $M_z = 1$
Number of total groups $M = M_x M_y M_z$	4 ~ 289
Max. number of segments in groups K_{max}	1281 ~ 27
Size of planar conductor $d_x \times d_y$	$4\lambda \times 4\lambda$
Radius of dipole segment a	0.00025λ
Incident angle of plane wave $(\theta_{inc}, \phi_{inc})$	$(30^\circ, 45^\circ)$
Error control parameter for FMM α_L	2
Error control parameter to stop iteration ϵ	10^{-4}

次に、CG法及びCG-FMMにおける反復1回当たりの計算時間及び反復回数を図4に示す。なお、比較のためCG法で板状導体を解析するのに要した反復1回当たりの計算時間及び反復回数を図中に示してある。CG法にはグループ分けの概念がないため、図中にはどちらの値もグループ数に依らない一定値として示してある。図4によると、反復1回当たりの計算時間は $M = 50 \sim 200$ の間で最小値に近い値を示している。理論的に最小値を示すと予想される $M = \sqrt{N} = 70$ 程度の場合だけでなく、その前後のグループ数ならばかなり小さい計算時間が実現できていることが分かる。従って、グループ数が $M = \sqrt{N}$ からずれた場合でも、計算時間が大幅に悪化することはないと言える。また、CG-FMMの反

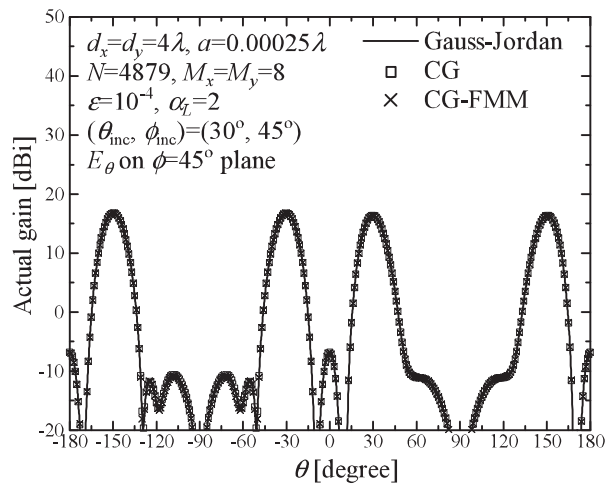


図 3: 板状導体の散乱パターン。

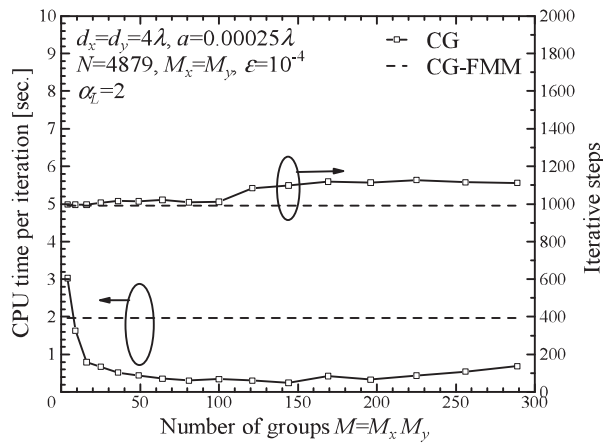


図 4: 反復 1 回当たりの計算時間及び必要な反復回数。

反復回数は CG 法の反復回数よりも常に大きな値を示し、グループ数 M の増加に伴って多少増加する傾向が見られた。Z 行列中のインピーダンスのうち、どのインピーダンスが厳密・あるいは近似的に計算されるかどうかは、グループ数に対応して変化する。そして近似的に計算されたインピーダンスには誤差が含まれ、厳密に計算したインピーダンスと異なる値になる。従って、グループ数の変化は、若干ではあるが Z 行列の変化をもたらし、異なる Z 行列から CG 法によって解を得るために必要な反復回数は異なるため、 M の増加に対して反復回数が増変したものと考えられる。

次に、CG-FMM の総計算時間を図 5 に示す。比較のために、Gauss-Jordan 法及び CG 法で板状導体を解析するのに要した時間も示している。図 5 から分かるように、 $M = \sqrt{N} = 70$ 前後のグループ数にした場合、総計算時間が最小値に近い値になった。また、グループ数 M が $M = \sqrt{N} = 70$ よりも極端に大きかったり小さかったりする場合は、計算時間が CG 法と比較してあまり削減されないことも分かる。

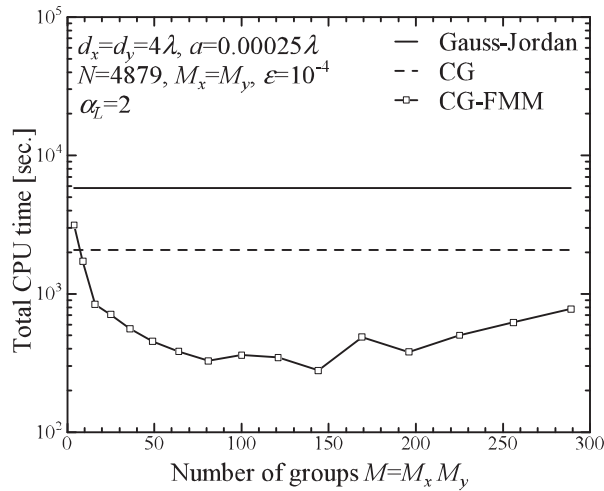


図 5: 総計算時間.

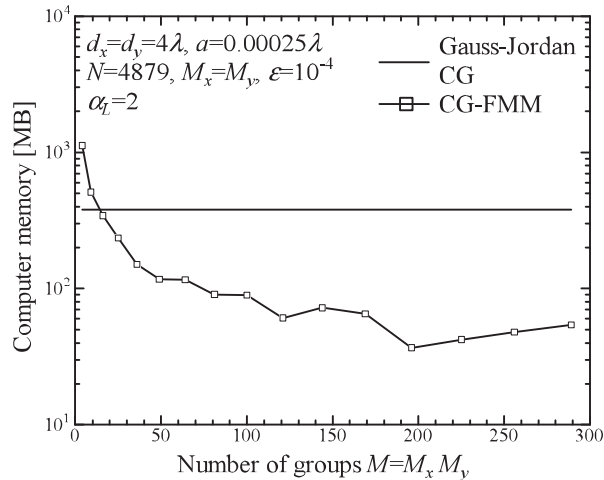


図 6: 計算機メモリ.

最後に、計算機メモリを図6に示す。計算機メモリは、グループ数 M が $M = \sqrt{N} = 70$ 付近で必ずしも最小にならず、 $M = 200$ 前後で最小値に近い値となっている。その原因としては、グループ配置の周期性をプログラム中で利用したことと、各グループに含まれるセグメント数が一定でないことの2つが考えられる。グループ配置の周期性をプログラムで利用すると、計算機メモリは(9)式と異なり、

$$\text{CPU time, computer memory} = O(N + N^2/M) \tag{10}$$

で表されることが分かっている。(10)式は、グループ数 M を N に近づけるほど計算機メモリは $O(N)$ に近づくということを意味している。従って、この場合は $M = \sqrt{N}$ が計算機メモリの最小値を与えるグループ数ではないことが分かる。

また、各グループの情報を保存するための計算機メモリ領域はプログラムの都合上、最大のセグメント数を持つグループに合わせて確保している。従って、各グループに含まれるセグメント数に大きな差がある場合 (1 グループだけ極端に多数のセグメントを含む場合など)、計算では使用しない無駄な計算機メモリを確保してしまうことになる。ゆえに、各グループに含まれるセグメント数をなるべく均一にするようなグループ分けの方が効率が良いと考えられる。

4 むすび

本報告では、CG-FMM を利用して、線状導体で構成された板状散乱導体の平面波散乱の数値解析を行った。その結果、CG-FMM による解析に要する反復 1 回当たりの計算時間及び総計算時間はグループ数 $M = \sqrt{N}$ 付近で最小値に近い値を示し、グループ数が $M = \sqrt{N}$ からずれた場合でも CG 法より高速に解析ができることが分かった。また、必要な反復回数はグループ数に対して変化した。計算機メモリは、プログラム中でグループの配置に周期性を利用したため、 $M = \sqrt{N}$ ではなく M が N に近づいたときに最小値になることが分かった。加えて、各グループに含まれるセグメント数にばらつきがないようにすると、不要なメモリ領域を確保せずに済むことも分かった。これらの検討結果は、CG-FMM を用いて宇宙太陽発電システム用大規模アレーアンテナのような大規模電磁界の数値解析を効率的に行うために、板状アンテナの解析モデルの作成に参考になると考えられる。

謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。また、研究にあたっては同センター関係各位に有益なご指導とご協力をいただいた。

参考文献

- [1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.
- [2] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas and Propagat. Mag. vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.
- [3] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," J. Comput. Phys., vol.86, no.2, pp.414-439, Feb. 1990.
- [4] S. Velampambil, and W.C. Chew, "Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.53, no.8, pp.2719-2727, Aug. 2005.

- [5] 今野 佳祐, ザイ フイチン, 陳 強, 澤谷 邦男, “高速多重極法を用いたアンテナの電磁界数値解析の検討,” 信学技報, vol. 107, no. 431, AP2007-141, pp. 111-116, 2008年1月.
- [6] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1972.