

[共同研究成果]

降着円盤における磁気回転不安定性の数値実験

齋 和人、寺田 直樹、加藤 雄人、小野 高幸
 東北大学大学院理学研究科地球物理学専攻

降着円盤内部における乱流生成メカニズムと考えられている磁気回転不安定性に関して、3次元磁気流体数値シミュレーションを行った。計算では、層化モデルと非層化モデルと呼ばれる代表的な2つの円盤モデルを扱った。2つのモデルにおいて得られた結果を比較したところ、使用する円盤モデルが異なることで不安定の成長の仕方が異なるという結果が得られ、層化モデルでは非層化モデルに比べて不安定が成長する波長が長波長側へシフトすることが示唆された。

1. はじめに

降着円盤とは、原始星やブラックホールなどの天体の周りを取り巻くガスが、その天体の周りを回転運動し、重力と遠心力の釣り合いにより円盤状の構造を形成したものである。中心天体周りを回転している円盤ガスは中心天体へ少しずつ落下していることが観測から分かっており[1]、このことを質量降着と呼ぶ。この質量降着は、“円盤内が乱流状態となっており、乱流によって生じる応力(以下、乱流応力)が効率的に角運動量を外側に輸送している”、とすることで説明が出来る。その乱流生成のメカニズムとして最有力と考えられているのが磁気回転不安定性(magneto-rotational instability、以下、MRI)である。MRIによって生じる円盤内乱流(以下、MRI乱流)は、質量放出[2]や惑星形成[3]など降着円盤で生じる現象に大きく影響を及ぼすことが指摘されており、MRI乱流による乱流応力の決定要因の解明が必要とされている。

磁気回転不安定性(MRI)

降着円盤の円盤ガスは重力と遠心力がほぼ釣り合い、回転運動をしていると考えられている。中心天体からの距離を R 、中心天体の質量を M_* 、万有引力定数を G としたとき、重力と遠心力の釣り合いから、回転角速度は $\Omega = (M_*/R^3)^{1/2}$ と得られる。従って、円盤ガスの回転速度は $u_\phi = R\Omega \propto R^{-1/2}$ となり、円盤の内側に行くにつれて回転速度が速くなった差動回転した状態になっていることが分かる。

MRIは、磁気流体力学(magneto hydrodynamics、以下、MHD)において、差動回転する回転円筒内で生じる不安定性であり、現在、MRIによって発生する乱流の性質を決定している物理量を理解するために、数値シミュレーション研究が盛んに行われている。磁場や速度場の各変数において、その平均値からのズレ(δf)が平均値に対して十分小さい場合($\delta f = f - f_0 \ll 0$ 、 f_0 は変数 f の平均値)、MHD方程式(後述)中に現れる δf の2次以上の項の影響を無視出来る。このような場合を線形段階と呼び、 δf が時間とともに大きくなっていく(成長する)状態を不安定と呼ぶ。図1は、MRIの線形成長の様子を模式的に示したものである。円盤ガスが完全電離した流体であるとして、始めに図1の左図のように、磁力線(図1の緑色の矢印)が降着円盤を垂直に貫いている場面を考える。ただし、図中の四角い箱は流体要素を、青い矢印は速度を、赤い矢印は力を表している。次に、図1の真中図のように、同じ磁力線に繋がれた2つの流体要素が、元の回転の軌道から少しだけズレたとする。すると、角運動量の保存から内側へ移動したものは速く回転し、外側へ移動したものは遅く回転する。この速度差によって磁力線は引き伸ばされていくが、磁力線は元に戻ろうとするため、流体要素には磁気張力が働く。磁気張力は速度差を小さくする方向へ働くため、重力と遠心力のバランスが崩れ、内側へ移動していた流体要素はさらに内側へ、外側へ移動していた方はさらに外側へ移動しようとする。このようにして、始めは小さな揺らぎだったものが大きな変動へと成長していくという不安定がMRIである。

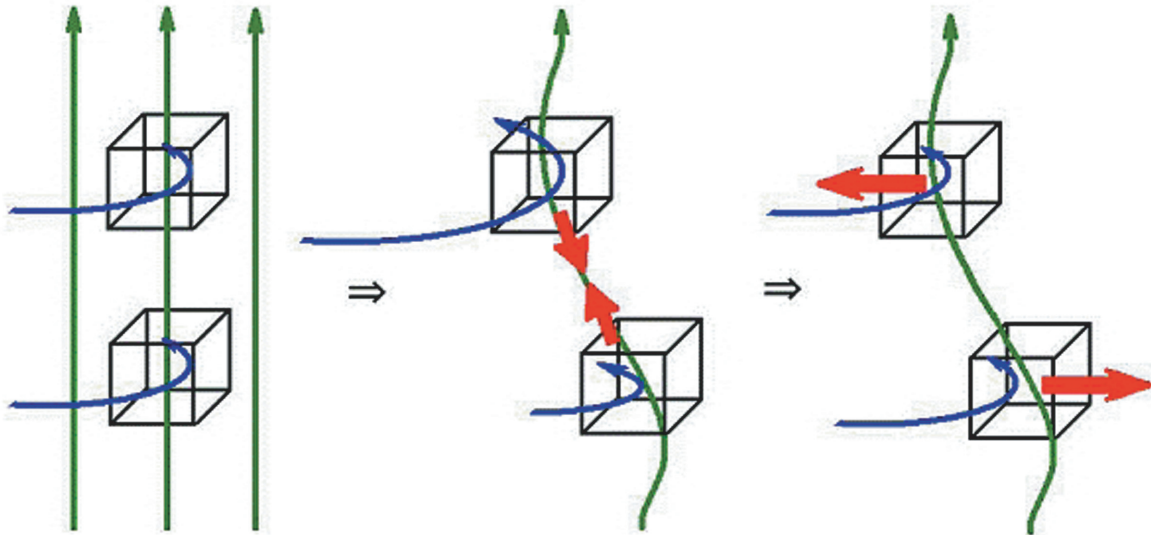


図1 MRIの線形成長の模式図

円盤モデル

MRIの研究で用いられる代表的な円盤モデルには、計算領域中で密度と圧力が一様な、非層化モデルと、中心天体による重力の円盤に垂直な成分を考慮し、それと釣り合うようにガスを配した、層化モデルの2種類がある。非層化モデルでは、Balbus と Hawley をはじめとした不安定の線形解析から、MRIの最大成長率が $\text{Im}(\omega_{\text{max}}) = 0.75 \Omega$ 、最大成長波長が $\lambda_c = 8 \pi v_{Az} / (15)^{1/2} \Omega$ と得られている [4, 5]。ただし、 $v_{Az} = B_z / (\mu_0 \rho)^{1/2}$ は z 方向の Alfvén 速度、 μ_0 は真空中の透磁率、 ρ は密度、 B_z は磁場の z 方向成分である。また、MRI 乱流によって生じる乱流応力 ($\langle w_{xy} \rangle$) を決定している物理量も特定されており、 $\langle w_{xy} \rangle = (0.74 \pm 0.27) \rho (L_z \Omega) (\lambda_c \Omega)$ という関係式が得られている [6]。ただし、 L_z は計算領域サイズを表している。

一方、層化モデルにおける乱流応力の関係式は得られておらず、今も研究が行われている。層化モデルに関する多くの研究が行われているが、特に非層化モデルで影響が示唆されていた、計算領域サイズ (L_z) や線形段階における最大成長波長 (λ) に関する依存性はあまり取り上げられていない。また、線形段階については、Salmeron と Wardle らを始めとした層化モデルにおける線形解析が行われているが [7]、解析の都合上、円盤の赤道面 (回転ベクトルに垂直で中心天体を通る面) に境界条件を設定する必要があるため、赤道面に節が存在する摂動のみを取り扱っており、最大成長率に関する議論のみで、最大成長波長に関する議論は行われていない。最大成長波長 (λ) は、非層化モデルにおいて乱流応力を決定する物理量となっていたため、層化モデルにおいても最大成長波長が乱流応力に対して大きな影響を持っていることが考えられる。

乱流応力を決定している物理的な要因の特定の一助とするために、層化モデルと非層化モデルの線形段階における振る舞いの相違点、特に最大成長波長の相違点、を明らかにすることを目的として研究を行った。本稿では、それによって得られた結果について報告する。

2. 手法

Local shearing box

MRI 乱流の空間スケールは降着円盤の大きさに比べて小さいため、数値計算によって MRI を再現するためには、円盤ガスの回転に乗った座標系において、円盤の一部分だけを切り取りその内部におけるガスの運動を追いかける local shearing box [6] が有効である (図 2)。Local shearing box では、円

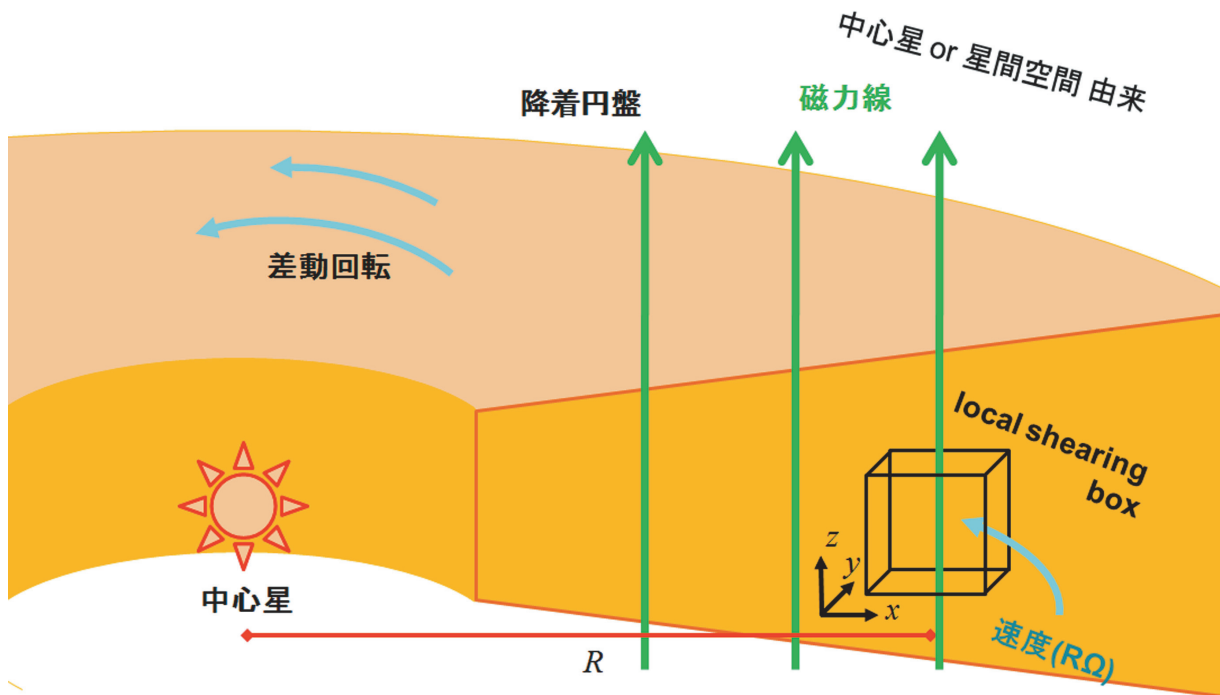


図2 降着円盤内の local shearing box の模式図

盤の狭い領域のみを取り扱うため、曲率による影響は小さいものとして無視することができ、3次元直交座標として計算が出来る。今後は、回転面内で中心天体から距離 R だけ離れた場所を原点にとり、中心天体から離れる方向に x 軸を、円盤ガスの回転方向に y 軸、円盤ガスの回転ベクトルと同じ向きに z 軸をとった座標系の下で議論していく。円盤ガスは差動回転しているため、円盤ガスの回転に乗った座標系においても、 $\mathbf{V}_0 = -(3/2)\Omega x \mathbf{e}_y$ という速度差が生じる。ただし、 \mathbf{e}_y は y 方向の単位ベクトルを表している。

磁気流体力学(MHD)方程式系

計算に使用する方程式系は、理想 MHD 方程式系とする。今回、速度の円盤ガスの回転に由来する成分 (\mathbf{V}_0) は既知の量であるから、速度を \mathbf{V}_0 とそれ以外の成分 \mathbf{v} に分離し、 \mathbf{v} の時間発展のみを解くこととする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + ((\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) \cdot \nabla) \rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + ((\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0 \rho} \nabla B^2 - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \Omega^2 z \mathbf{e}_z - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times ((\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + ((\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) \cdot \nabla) p = -\gamma p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4)$$

ただし、 t は時間、 \mathbf{B} は磁場、 p は圧力、 γ は比熱比を表している。ここでは、円盤の回転に乗った座標系を考えているため、運動方程式(式(2))中にはコリオリ力(右辺第4項)が含まれている。運動方程式の右辺第5項は、中心天体による重力の z 方向成分を表しており (x 方向成分に関しては、遠心力と

の釣り合いを考えているため方程式中には現れない)、後に紹介する層化モデルの計算の場合のみに使用する。

計算コード

数値計算コードには、自作した RCIP-MOCCT 法[8]を採用しており、さらに、非線形波の非物理的な減衰を抑えるための独自の改良が加えてある。この計算手法は、非保存系の式を用いて計算しており、変数に加えて微分値の時間発展も解くため計算量が増えてしまうという短所を持つが、波形の位相遅延誤差が他の計算コードに比べて小さく、伝搬特性に優れているという長所を持っている。今回用いている local shearing box では、背景の速度 \mathbf{V}_0 に乗って変動が伝搬していくため、波形の伝搬特性に強みを持つ RCIP-MOCCT 法が適していると言える。

モデル

計算領域は、 x 方向に $-0.5H \sim 0.5H$ 、 y 方向に $-0.5\pi H \sim 0.5\pi H$ 、 z 方向に $-0.5H \sim 0.5H$ とし、各方向に 64 格子点を用いた。ただし、 H はスケールハイトと呼ばれ、円盤の厚さを表す。境界条件は、 y 、 z 境界に周期境界条件を使用し、 x 境界には、背景の速度(\mathbf{V}_0)によって時間とともにズレていく分を考慮した、ズレ周期境界条件[6]を採用した。

計算に使用した初期条件を表 1 にまとめた。Run1 では非層化モデルを想定し、Run2 では層化モデルを想定している。Run2 では運動方程式中に中心天体由来の重力の z 方向成分(式(2)の右辺第 5 項)を加える。 z 方向には、この中心天体由来の重力と圧力勾配が釣り合った静水圧平衡を想定し、密度と圧力に z 方向の勾配を与える。今回は 2 つのモデルの違いを見るため、モデルの違い以外は同じになるよう、赤道面($z=0$)における密度、圧力、磁場が同じになるように設定しており、赤道面でプラズマ $\beta (=8\pi p/B^2$: 磁場圧力に対するプラズマ圧力の比)は同じになっている。MRI を励起するために初期の微小な摂動が必要であるが、計算コードの制約上、磁場の初期条件は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満足している必要があるため、初期磁場は空間一様とし、微小な摂動は速度成分にのみ与えた。速度成分に与えた微小な摂動は、様々な波数が存在できるよう乱数で与えており、最大値が音速($c_s=(\gamma p/\rho)^{1/2}$)の 100 分の 1 程度になるようにしてある。また、比熱比は $\gamma=5/3$ とし、 $\Omega=1/1000$ とした。

この場合、非層化モデルにおける最大成長波長は $\lambda_c=0.46H$ となり、これを波数に直すと $n_z=2.18[1/H]$ となる。ここでは、 z 方向には周期境界条件を適用しているため、波数が $n_z=2[1/H]$ の摂動が成長率 0.75Ω で最大成長すると予想される。

表 1 計算に用いたパラメータ

	Run1(非層化モデル)	Run2(層化モデル)
密度	1	$\exp(-z^2/2H^2)$
圧力	10^{-6}	$10^{-6} \exp(-z^2/2H^2)$
速度	v_x, v_y, v_z : 振幅が $c_s/100\gamma$ 以下の乱数 ※MRI の初期摂動	
磁場	$B_x=B_y=0$ $B_z=(2\pi)^{1/2} \times 10^{-4}$	

3. 結果

2 章で説明した設定のもと、東北大学サイバーサイエンスセンターの SX-9 を 8CPU 用いて並列計算を行った。計算毎に、使用したメモリサイズは約 9.2 Gbyte で、計算時間は実時間で 3 時間強程度を要した。

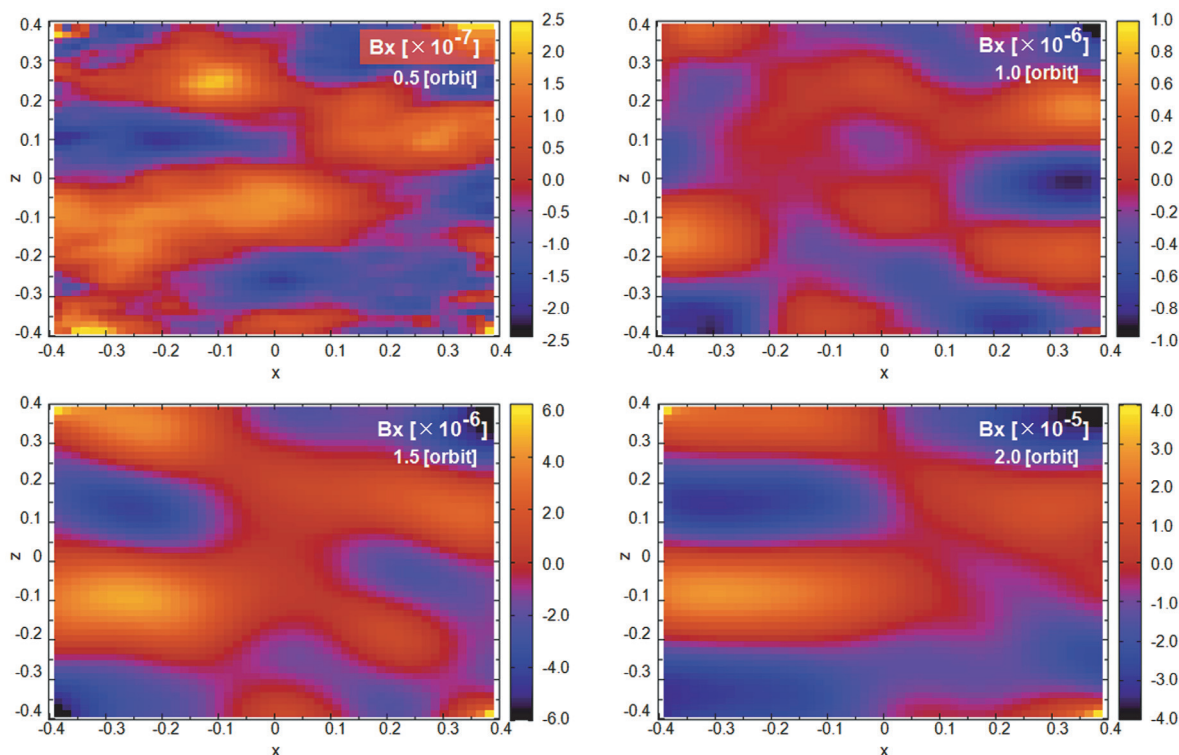


図3 Run1(非層化モデル)における磁場の x 方向成分の時間変化

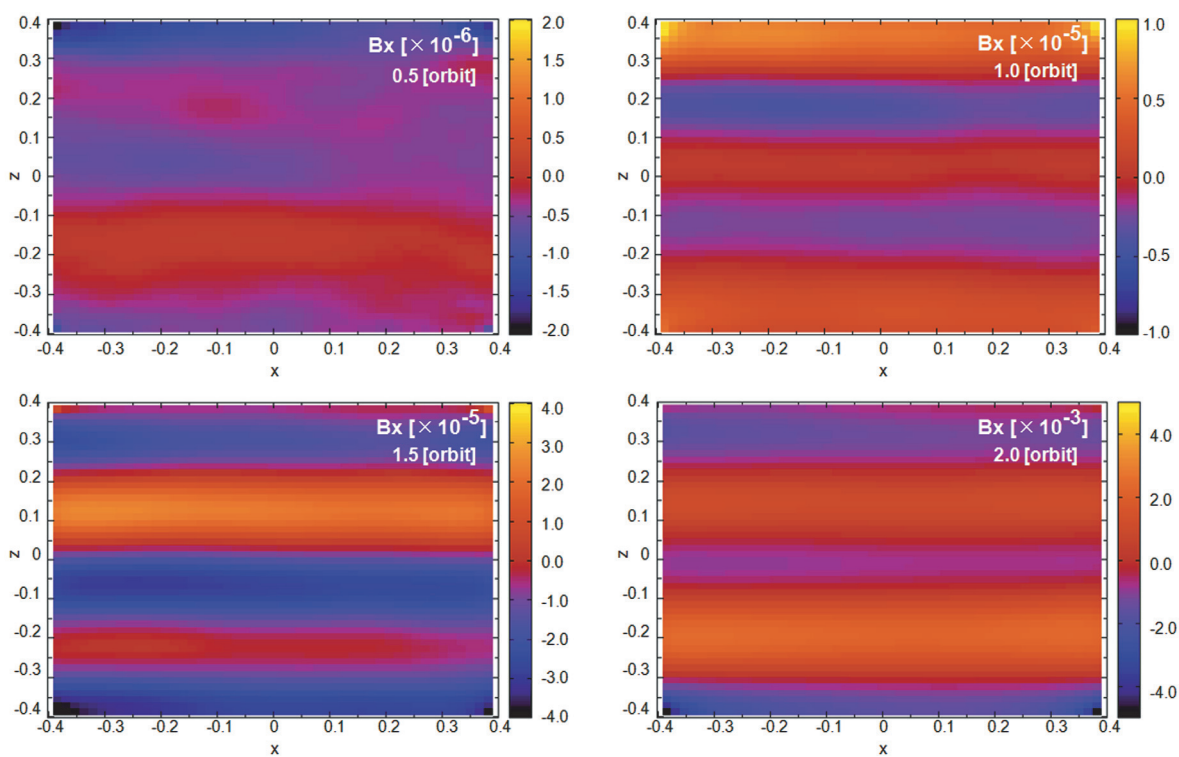


図4 Run2(層化モデル)における磁場の x 方向成分の時間変化

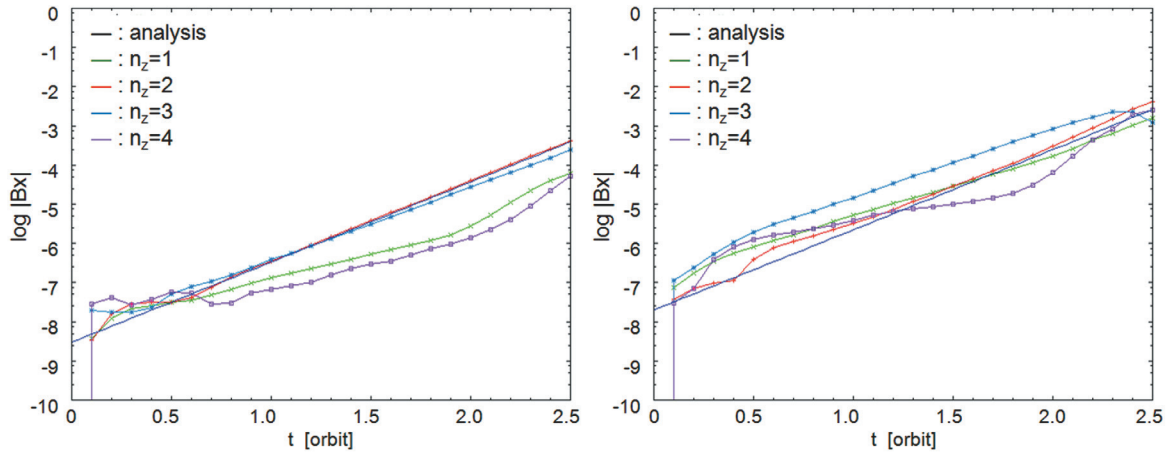


図5 磁場の x 方向成分が含む摂動の振幅の時間発展の様子
(左)Run1(非層化モデル)、 (右)Run2(層化モデル)

図3は、非層化モデルにおける計算結果のうち、 $y=0$ の断面(x-z面)における磁場のx方向成分の時間発展の様子をカラーコンターで示したものである。横軸にx軸、縦軸にz軸、カラーコンターで磁場のx方向成分を表しており、左上図、右上図、左下図、右下図はそれぞれ時刻が $t=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ [orbit($=2\pi/\Omega$)]の時の様子を表している。ただし、MRIは円盤1回転(orbit)で、摂動が約110倍にも増幅する不安定であるため、カラーコンターのスケールはそれぞれの図毎に見やすくなるようになっており、異なっている。図3から、始めの $t=0.5$ [orbit]では細かな変動も見られるが、最終的に $t=2.0$ [orbit]では、z方向の波数が $n_z=2$ [1/H]の摂動が卓越している様子が見て取れる。

一方、図4は、層化モデルの計算結果を、図3と同じように並べたものである。こちらの場合、z方向の波数が $n_z=3$ [1/H]の摂動が卓越している様子が見て取れる。

層化モデルと非層化モデルで得られた結果から、成長率と波数の関係を論じるために、磁場のx方向成分をz方向にフーリエ変換し、それをx-y方向に平均化を行うことで得られた、 $n_z=1, 2, 3, 4$ [1/H]の摂動の振幅の時間変化を図5に示した。図5の左側が非層化モデルを、右側が層化モデルの結果を表しており、縦軸にそれぞれの波数の振幅を対数スケールでとり、横軸に時間 t [orbit($=2\pi/\Omega$)]をとっている。緑、赤、青、紫の実線はそれぞれ $n_z=1, 2, 3, 4$ [1/H]を表しており、藍色の直線は非層化モデルにおける線形理論から得られた最大成長率を表している(傾きには意味があるが、切片に意味はない)。ただし、境界条件による影響を取り除くため、 $-0.4H < x < 0.4H$ 、 $-0.4\pi H < y < 0.4\pi H$ 、 $-0.5H < z < 0.5H$ の範囲におけるデータを使用している。

図5左図では、 $t=0.9\sim 1.9$ [orbit]の間において、いずれの線も直線状に分布しており、線形成長をしていることが分かる。一方、 $t=2.0$ [orbit]以降では、 $n_z=1, 4$ [1/H]の摂動が急激な成長を示しているが、これは $t=2.0$ [orbit]付近で、 $n_z=2, 3$ [1/H]の摂動が初期磁場($(2\pi)^{1/2} \times 10^{-4}$)に匹敵する大きさになっていることから、非線形な影響が現れているものと分かる。このことから、初期磁場を越えない範囲で曲線が比較的直線状に分布している区間を、線形成長段階と位置付ける。図5左図の非層化モデルでは、前述のように $t=0.9\sim 1.9$ [orbit]を線形成長段階とする。同様に、図5右図の層化モデルでは、 $t=0.8\sim 1.7$ [orbit]を線形成長段階とする。

また図5の右図からは、波数 $n_z=1, 3$ [1/H]の摂動も $n_z=2, 4$ [1/H]の摂動と同様に成長している様子が見られ、層化モデルの線形解析では予想はされていたが確認はされていなかった、 $z=0$ で腹が現れる摂動についても、MRIで成長している様子を確認することが出来る。図4と図5の右図において $n_z=3$ [1/H]の摂動が卓越しているように見えるが、図5右図の傾きに注目すると、 $n_z=3$ [1/H]と $n_z=2$ [1/H]は同じような傾きを示していることから、初期条件において $n_z=3$ [1/H]の摂動が大きくなってしまったため全体として卓越しているように見えるが、同じ程度の成長率であることが分かる。

表 2 線形成長率

モデル	成分	成長率($\text{Im}(\omega)$)			
		$n_z=1[1/H]$	$n_z=2[1/H]$	$n_z=3[1/H]$	$n_z=4[1/H]$
Run1 非層化モデル	B_x	0.44 Ω	0.74 Ω	0.68 Ω	0.45 Ω
	B_y	0.47 Ω	0.75 Ω	0.69 Ω	0.44 Ω
Run2 層化モデル	B_x	0.56 Ω	0.66 Ω	0.65 Ω	0.32 Ω
	B_y	0.58 Ω	0.66 Ω	0.63 Ω	0.27 Ω

図 5 で示したものと同一解析を磁場の y 方向成分に対しても行っており、図 5 において線形成長段階と位置付けた区間における結果から、線形成長率を計算し、表 2 にまとめた。表 2 から、非層化モデルの波数 $n_z=2[1/H]$ の摂動で成長率が 0.75 Ω と最大値と成っていることが分かる。これは、線形解析[4, 5]から得られている、波数 $n_z=2[1/H]$ に対応する成長波長と成長率の関係と 99% で一致しており、良い一致を示している。このことから、我々の計算が現象を正しく再現していることを確認できる。

2 つのモデルの結果を比較してみると、波数 $n_z=3[1/H]$ の摂動は、どちらのモデルでもほとんど同じような成長率を示していることが分かる。また、波数 $n_z=1[1/H]$ の摂動では、非層化モデルに比べて層化モデルの方が大きな成長率を示しており、それとは逆に、波数 $n_z=2[1/H]$ の摂動では小さな成長率を示している。このことから、層化モデルの方では非層化モデルに比べて、最大成長波長が長波長側へシフトしていることが示唆される。

4. まとめ

本稿では、MHD 数値シミュレーションによって、層化モデルと非層化モデルにおける MRI の成長の様子の違い、特に、最大成長波長の違いについて検証を行った。その結果、

- ・ 非層化モデルの計算では、線形解析で得られている成長率、成長波長とほとんど同じ結果が得られ、本稿で報告した数値実験の結果が現象を正しく再現していることが確認された。
- ・ 層化モデルと非層化モデルの結果の比較から、非層化モデルに比べて層化モデルの方では、最大成長波長が長波長側へシフトしていることが示唆された。

今回の結果から、2 つのモデルでは線形成長の段階から異なる振る舞いを示しているため、層化モデルにおいても、非層化モデルで検証されていたパラメータに対する依存性を再度検証する必要性を示唆している。特に、非層化モデルで乱流応力を決定している最大成長波長と計算領域サイズに対する依存性に関する検証は、乱流応力を決定している物理量の解明の鍵になると考えられる。

謝辞

本研究は東北大学サイバーサイエンスセンターとの平成 21 年度共同研究である「惑星磁気圏における波動粒子相互作用についての計算機実験」を進める中で得ることができた。同センターとの共同研究としてシミュレーションコードの開発が進められ、共同研究を通じて多くの有益な助言を頂き、SX-9 の持つ演算性能の活かした高効率な演算を行うことが出来た。

参考文献

- [1] Gullbring., Erik, Lee Hartmann, Cesar Briceno, and Nuria Calver, Disk accretion rate for T Tauri stars, *The Astrophysical Journal*, **492**, 323, 1998
- [2] Suzuki, T. K., S. Inutsuka, Disk winds driven by magnetorotational instability and dispersal of protoplanetary disks, *The Astrophysical Journal*, **691**, 49-54, 2009

- [3] Johansen, A., J. S. Oishi, M-M. M. Low, H. Klahr, T. Henning, and A. Youdin, Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks, *Nature*, **448**, 1022-1025, 2007
- [4] Sano, T., and S. M. Miyama, Magnetorotational instability in protoplanetary disks. I. On the global stability of weakly ionized disks with ohmic dissipation, *The Astrophysical Journal*, **515**, 776-786, 1999
- [5] Balbus, S. A., and J. F. Hawley, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I. Linear analysis, *The Astrophysical Journal*, **376**, 214-222, 1991
- [6] Hawley, J. F., C. F. Gammie, and S. A. Balbus, Local three-dimensional magnetohydrodynamic simulations of accretion disks, *The Astrophysical Journal*, **440**, 742-763, 1995
- [7] Salmeron, R., and S. M. Wardle, Magnetorotational instability in stratified, weakly ionized accretion discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **345**, 992-1008, 2003
- [8] Kudoh, T., K. Shibata, Magnetically driven jets from accretion disks. II. Nonsteady solutions and comparison with steady solutions, *The Astrophysical Journal*, **476**, 632-648, 1997