

[共同研究成果]

平行平板間乱流熱伝達におけるスカラー散逸場のDNS解析

小塚 信\* 河村 洋\*\*

\*東京理科大学 理工学研究科 機械工学専攻

\*\*東京理科大学 理工学部 機械工学科

1. 諸言

乱流に関わる現象は、自然界、産業界を通じて我々の生活に深く関与している。乱流は無限自由度、非定常、不安定であり、非線形、散逸性を含む極めて複雑な力学系であるため、その挙動はもとより制御は極めて困難である。しかし、この乱流を精度良く予測し自在に制御できれば、流体抵抗の低減、流れの剥離や流体音の抑制、あるいは熱や物質の混合の促進などを通じ、省エネルギー化や環境負荷の低減に対して貢献できる。

壁乱流による熱や物質輸送を伴うケースは工学的アプリケーションで数多く見られるため、重要な研究対象のひとつである。壁付近の微細渦の周囲には特徴的な乱流構造が存在しており、乱流熱伝達や乱れエネルギーの生成・散逸・拡散などと密接に関連している。また、熱・流体工学と他分野との融合領域で起こる化学反応や相変化などを伴う熱流体现象には今だ、未解明な部分が多い。従って、壁付近の流れのダイナミクス及びそれらが熱・物質輸送に与える影響を解明し、様々な条件下における熱流動現象を把握することは工学的に非常に重要である。

現在では、乱流現象を予測、解明するために、直接数値シミュレーション(DNS)が必要不可欠な研究手段とされている。DNSはモデル化を用いないために計算負荷が問題となるが、その厳密性は評価に値し、乱流モデルの構築や乱流熱輸送現象の解明に関して果たす役割は大きい。従来までは、計算機の制約上、低レイノルズ数、低プラントル数が解析対象とされてきた[1,2]。近年、大型計算機環境の整備が進み、実用的なより高いレイノルズ数やプラントル数における乱流熱伝達のDNSが可能となってきた[3-5]。

乱流熱伝達のDNSにおいては、温度拡散の最小スケール $\eta_0$  (Batchelor scale)を捉えるほどの高い空間解像度が必要とされる。次式に示すように、 $\eta_0$ は速度場の最小スケール $\eta$  (Kolmogorov scale) に対して、解析的にプラントル数  $Pr$  の $-1/2$  乗に比例することが知られている。

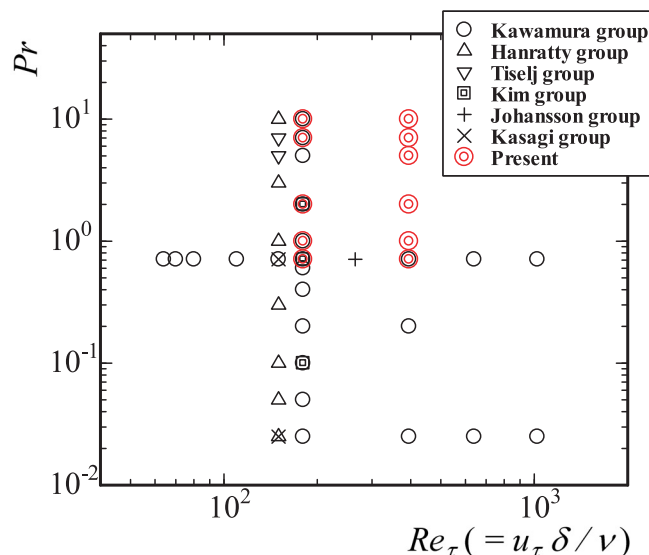


図1 平行平板間乱流熱伝達のDNSにおけるレイノルズ数とプラントル数.

$$\eta_\theta = \eta \cdot Pr^{-1/2} \tag{1}$$

つまり、 $Pr$  が 1 よりも大きくなれば、熱輸送に対する格子幅をさらに細かくしなければならず、より多くの計算資源が要求される。このような理由により、熱輸送を伴う乱流の DNS は主に、低  $Pr$  ( $Pr < 1$ ) において計算が実施されており、1 以上の比較的高い  $Pr$  についてはあまり行われていない(図 1 参照)。また、比較的高い  $Pr$  における DNS では、平均温度分布や熱伝達率などの低次統計量に対する  $Pr$  依存性や温度場における大規模構造を調査することを主な目的としていたため、空間解像度は  $\eta_\theta$  よりも粗く設定されているものがほとんどであった[5,6]。乱流エネルギー散逸率やスカラー散逸率の収支などの高次統計量は、高精度な乱流モデル開発において重要であるため、高次統計量を取得する際には、 $\eta_\theta$  を解像できる空間解像度を設定する必要がある。

そこで本研究では、 $\eta_\theta$  をできる限り捉え得る細かな空間解像度を用いて平行平板間乱流熱伝達の高解像度 DNS を実施し、比較的高いプラントル数の熱伝達特性をより正確に評価することを主な目的とする。乱流エネルギー散逸率、スカラー散逸率の収支などの高次統計量や小スケールスカラー散逸構造におけるレイノルズ数とプラントル数の影響を調査する。また同様の乱流場において既存乱流モデルのアプリオリテストを行い、実用計算モデルの構築に有用な知見を得る。

## 2. 解析対象

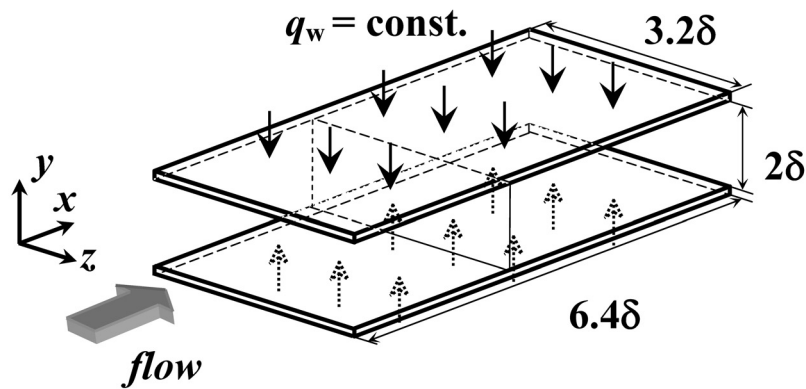


図 2 解析対象.

解析対象を図 2 に示す。流れ場は非圧縮性のニュートン流体とし、平均圧力勾配により駆動される十分に発達した平行平板間乱流である。壁面上では滑り無し条件とし、無限に広い平行平板を模擬するため、主流( $x$ )方向及びスパン( $z$ )方向には周期境界条件と適用した。本研究で用いられるレイノルズ数は、壁面摩擦速度  $u_\tau$  及びチャンネル半幅  $\delta$  で定義されるレイノルズ数  $Re_\tau (=u_\tau \delta/\nu)$  で  $Re_\tau=180, 395$  の計算を行った。ここで  $\nu$  は動粘性係数である。

温度場の境界条件は、上下壁面等熱流束加熱条件を適用した。乱流拡散による熱輸送の基礎的性質を調査するため、浮力の影響は考慮していない。本研究で扱うプラントル数は、 $Pr = 0.71, 1.0, 2.0, 5.0, 7.0, 10$  であり、空気から水に相当する流体を対象としている。

## 3. 数値解析手法

### 3.1 支配方程式

速度場の支配方程式は、連続の式及び Navier-Stokes 方程式である。ここで、 $u_i$  は速度、 $p$  は圧力、 $t$  は時間である。各方程式において、 $i=1, 2, 3$  はそれぞれ、 $x$  方向、壁垂直( $y$ )方向、 $z$  方向を示す。上添え字(+)は  $u_\tau$  及び  $\nu$  で、(\*)は  $\delta$  でそれぞれ無次元化されている。上添え字(')は、瞬時

値から平均値を引いた変動分を意味する.

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial x_i^*} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^*} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'^+}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^{*2}} - \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial x_1^*} \delta_{i1} \quad (3)$$

加熱条件として等熱流束加熱条件を課す場合、壁面上での熱的境界条件を 0 とするために、次のように温度偏差  $\theta$  を用いる. この時、統計的に平均化された温度は  $x$  方向に対して線形的に増加する. それゆえ、壁面摩擦温度  $T_\tau (=q_w/\rho c_p u_\tau)$  により無次元化された瞬時の温度  $T^+(x^*, y^*, z^*)$  は以下のように変換される.

$$T^+(x^*, y^*, z^*) = \frac{d\langle \bar{T}_m^+ \rangle}{dx^*} x^* - \theta^+(x^*, y^*, z^*) \quad (4)$$

ここで、 $\langle \bar{T}_m^+ \rangle$  は混合平均温度である. 本研究対象では、主流方向の温度勾配は一定値で与えられるので、エネルギー方程式は以下のように表わされる.

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t^*} + u_j^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Re_\tau \cdot Pr} \frac{\partial^2 \theta^+}{\partial x_j^{*2}} + \frac{u_1^+}{\langle u_1^+ \rangle} \quad (5)$$

本 DNS における一様熱流束とは、瞬時における局所の熱流束は変化するが、空間平均された熱流束は一定であることを意味している.

### 3.2 計算手法

連続の式と Navier-Stokes 方程式のカップリングにフラクショナル・ステップ法を、空間的離散化には有限差分法を用いた. 対流項の離散化には、スペクトル法との比較で良い一致が確認されているコンシステント・スキーム[7]を適用する. 主流方向とスパン方向に四次精度中心差分を、壁垂直方向には二次精度中心差分を用いた. また、壁垂直方向は不等分割格子としている. 時間進行は、壁垂直方向の粘性項に対しては、二次精度クランク・ニコルソン法を、その他の項に対しては二次精度アダムス・バッシュフォース法を適用した. その他の計算手法に関する詳細は [3,4]を参照されたい.

### 3.3 プログラム性能

本計算プログラムは、昨年度の共同研究において最適化を施したプログラムをベースに、今回の研究目的に則したコードへと拡張したものである. 昨年度、コンパイル時に 2000 行を超える大規模な DO ループでは、OpenMP による並列化が効率的に行われなかったという問題が生じた. サイバーサイエンスセンター・スタッフの方と共同で原因究明を行ったが、この問題が生じた理由を突き止めることはできなかった. 分割の仕方を変えて何通りかコンパイルしてみたところ、2000 行未満であれば正しく並列化されることがわかった. 今年度はこの経験を参考に、大規模ループを避けるようコードの拡張・並列化を実施した.

表 1 に Proginf の一例を示す. ここで、計算プログラムの解析条件は、 $Re_\tau = 395$ ,  $Pr = 1.0$ ,  $7.0$  とし、 $70,000\text{step}$  (無次元時間  $t^* = tu_\tau/\delta = 0.70$ ) に亘って解析を行ったものである. 総格子点数は昨年度と同様、最大で 5 億点であり、平行平板間乱流熱伝達の DNS においては、世界一細かな空間解像度を設定した. 使用メモリは約 150GB を要した. 平均ベクトル長、ベクトル演算率共に昨年度同様高い値を示しており、本計算プログラムにおける並列化が有効に行われていることがわかる.

表1 プログラム性能(SX-9 利用).

CPU 時間 [h:m:s]	1203:20:1
MOPS 値	75503.03
MFLOPS 値	43748.99
MOPS 値 (実行時間換算)	1206453.89
MFLOPS 値 (実行時間換算)	699059.89
平均ベクトル長	255.97
ベクトル演算率[%]	99.86
メモリサイズ[MB]	147,520
プロセッサ同時実行時間	(16 並列時)
Conc. Time(>= 1)(sec)	271107.94
Conc. Time(>= 2)(sec)	271096.92
Conc. Time(>= 3)(sec)	271096.76
Conc. Time(>= 4)(sec)	271096.68
Conc. Time(>= 8)(sec)	271096.53
Conc. Time(>=16)(sec)	265820.72

## 4. 結果及び考察

### 4.1 スカラー散逸場と乱流エネルギー散逸場の可視化

壁面近傍におけるスカラー散逸率 $\varepsilon_\theta$ と乱流エネルギー散逸率 $\varepsilon$ の瞬時場における違いを明らかにするために、図3に、 $\varepsilon_\theta^+$ 及び $\varepsilon^+$ に関する時系列データを可視化した。スカラー散逸率 $\varepsilon_\theta^+$ と $\varepsilon^+$ は、以下のように定義される。

$$\varepsilon_\theta^+ = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \theta^+}{\partial x_k^+} \right)^2 \tag{6}$$

$$\varepsilon^+ = \left( \frac{\partial u_i^+}{\partial x_k^+} \right)^2 \tag{7}$$

図3において、(+) は、速度勾配テンソルの第二不変量 $II^+$ の負値が最大となる位置を表わしている。第二不変量 $II^+$ は次式で与えられる。

$$II^+ = \frac{\partial u_j^+}{\partial x_i^+} \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} \tag{8}$$

第二不変量が負となる領域は、管状渦を表わすものとしてよく用いられている。

式(6), (7)より、 $Pr \approx 1$ の時、両者の定義式は非常に良く似ている。従って、 $\varepsilon_\theta^+$ 及び $\varepsilon^+$ の分布は類似すると考えられる。図3(a)より、強い乱流エネルギー散逸率は渦内部(渦芯)とその周囲に形成される。一方、 $Pr = 0.71$ におけるスカラー散逸率の場合、渦芯部にはほとんど存在せず、主

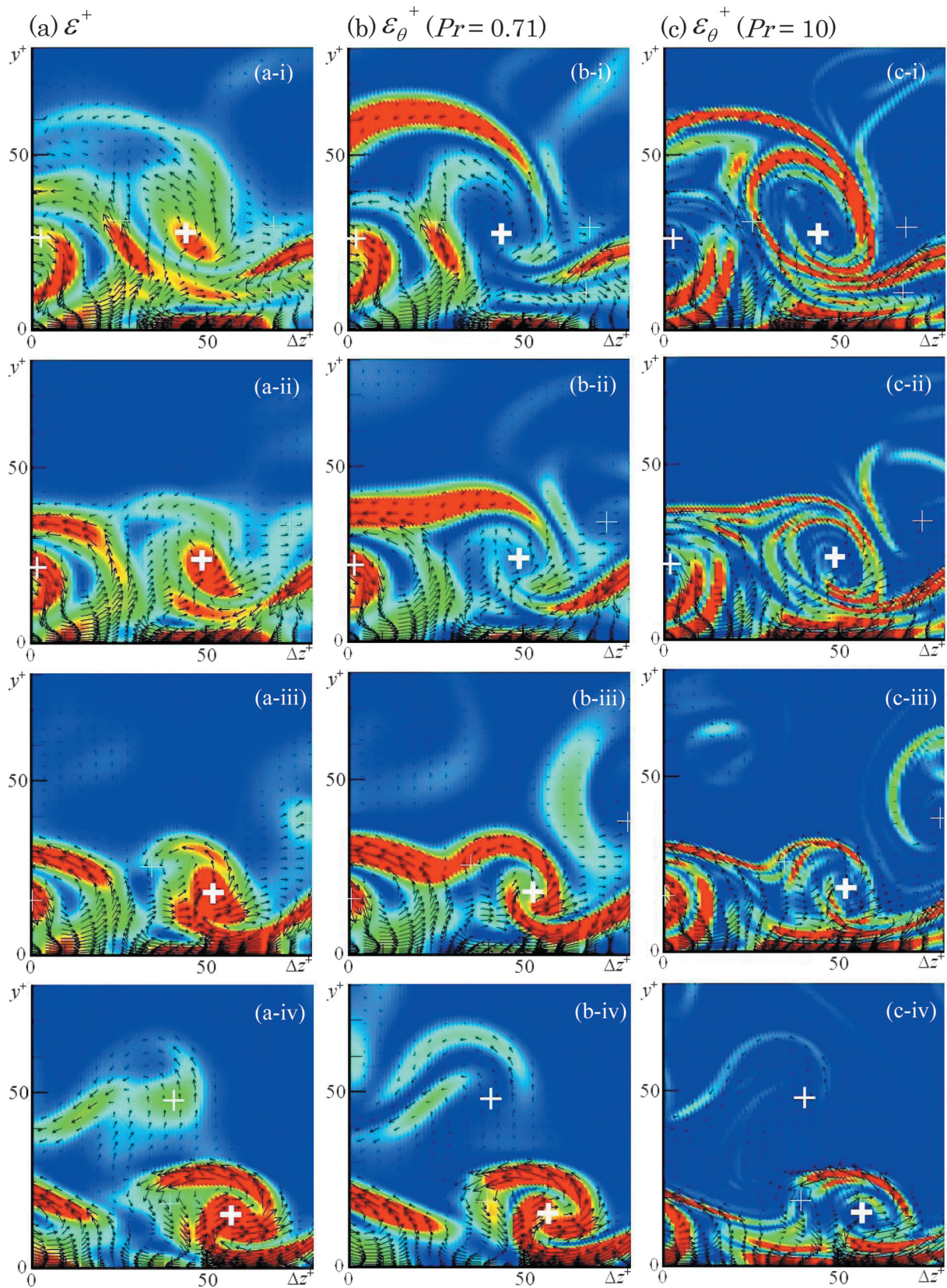


図3 乱流エネルギー散逸率  $\varepsilon^+$  とスカラー散逸率  $\varepsilon_\theta^+$  に関する時系列データの可視化. 時間変化は  $i \rightarrow iv$  である. (+) は変形速度テンソルの第二不変量  $II^+$  の負値が最大となる位置を表わしており, 太い線ほど大きな値 (強い渦運動) を示している. ベクトルは渦度変動 ( $\omega'_3, \omega'_2$ ) を示している. なお, (b) 及び (c) は同一速度場の下で計算されている.

に周辺部に形成されることがわかる(図3(b)参照). 渦周辺部で形成された温度勾配が継続的な変形を受けることにより温度勾配が渦中央付近にまで到達するようになるので, 強い $\varepsilon_\theta^+$ は渦芯部においても生じるようになる(図3(b-i)→(b-iv)参照). 図3(c)より,  $Pr$ が増加すると, スカラー散逸構造は微細になり, また, シート状の構造は薄くなることわかる.

#### 4.2 スカラー散逸率と乱流エネルギー散逸率の収支

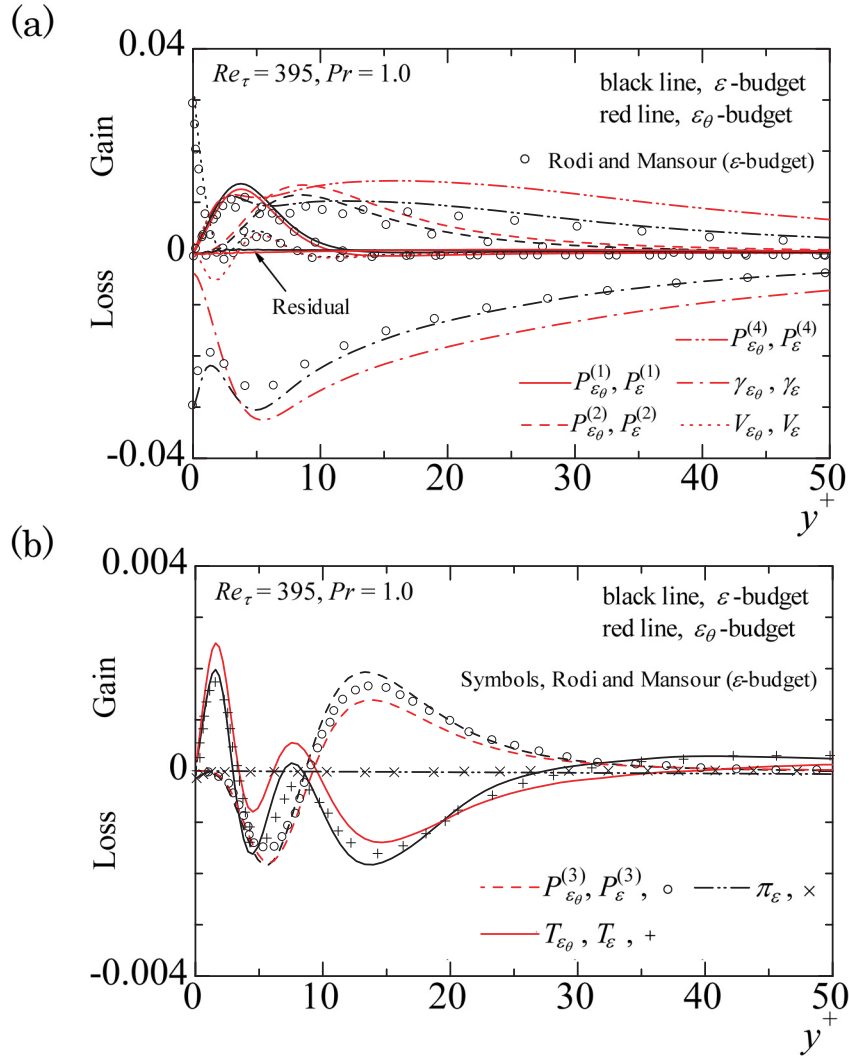


図4  $\varepsilon_\theta^+$  と  $\varepsilon^+$  の収支 : (a) 値の大きな項, (b) 比較的値の小さな項.

スカラー散逸率と乱流エネルギー散逸率の輸送方程式の各項の分布を比較するために, 両者の収支を図4に併せて示す. 比較のため, Rodi et al. [8]による結果も同図に示す. エネルギー方程式から導出される厳密な $\varepsilon_\theta^+$ の輸送方程式は以下のように書ける.

$$\frac{D\varepsilon_\theta^+}{Dt^+} = P_{\varepsilon_\theta}^{(1)} + P_{\varepsilon_\theta}^{(2)} + P_{\varepsilon_\theta}^{(3)} + P_{\varepsilon_\theta}^{(4)} + T_{\varepsilon_\theta} + V_{\varepsilon_\theta} - \gamma_{\varepsilon_\theta} \quad (9)$$

Production by mean temperature gradient:

$$P_{\varepsilon_\theta}^{(1)} = -\frac{2}{Pr} \frac{\partial u_j^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial \theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial \theta^+}{\partial x_j^+} \quad (10)$$

Production by mean velocity gradient:

$$P_{\varepsilon\theta}^{(2)} = -\frac{2}{Pr} \overline{\frac{\partial\theta^+}{\partial x_j^+} \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_j}{\partial x_k^+}} \quad (11)$$

Gradient production:

$$P_{\varepsilon\theta}^{(3)} = -\frac{2}{Pr} \overline{u_j' \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial^2\theta^+}{\partial x_j^+ \partial x_k^+}} \quad (12)$$

Turbulent production:

$$P_{\varepsilon\theta}^{(4)} = -\frac{2}{Pr} \overline{\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial\theta^+}{\partial x_j^+}} \quad (13)$$

Turbulent diffusion:

$$T_{\varepsilon\theta} = -\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j^+} \left( \overline{u_j'^+ \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+}} \right) \quad (14)$$

Viscous diffusion:

$$V_{\varepsilon\theta} = \frac{1}{Pr^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^{+2}} \left( \overline{\frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial\theta^+}{\partial x_k^+}} \right) \quad (15)$$

Dissipation:

$$\gamma_{\varepsilon\theta} = \frac{2}{Pr^2} \overline{\left( \frac{\partial^2\theta^+}{\partial x_k^+ \partial x_j^+} \right)^2} \quad (16)$$

一方、 $\varepsilon^+$  の輸送方程式の厳密形は、Navier-Stokes 方程式を変形することにより、以下のように与えられる。

$$\frac{D\varepsilon^+}{Dt^+} = P_{\varepsilon}^{(1)} + P_{\varepsilon}^{(2)} + P_{\varepsilon}^{(3)} + P_{\varepsilon}^{(4)} + T_{\varepsilon} + V_{\varepsilon} + \pi_{\varepsilon} - \gamma_{\varepsilon} \quad (17)$$

Mixed production:

$$P_{\varepsilon}^{(1)} = -2 \overline{\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i}{\partial x_j^+}} \quad (18)$$

Production by mean velocity gradient:

$$P_{\varepsilon}^{(2)} = -2 \overline{\frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_j}{\partial x_k^+}} \quad (19)$$

Gradient production:

$$P_{\varepsilon}^{(3)} = -2 \overline{u_j'^+ \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^+ \partial x_k^+}} \quad (20)$$

Turbulent production:

$$P_{\varepsilon}^{(4)} = -2 \overline{\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+}} \quad (21)$$

Turbulent diffusion:

$$T_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_j^+} \left( \overline{u_j^{r+} \frac{\partial u_i^{r+}}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i^{r+}}{\partial x_k^+}} \right) \quad (22)$$

Viscous diffusion:

$$V_\varepsilon = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^{+2}} \left( \overline{\frac{\partial u_i^{r+}}{\partial x_k^+} \frac{\partial u_i^{r+}}{\partial x_k^+}} \right) \quad (23)$$

Pressure diffusion:

$$\pi_\varepsilon = -2 \frac{\partial}{\partial x_k^+} \left( \overline{\frac{\partial p^{r+}}{\partial x_j^+} \frac{\partial u_k^{r+}}{\partial x_j^+}} \right) \quad (24)$$

Dissipation:

$$\gamma_\varepsilon = 2 \left( \overline{\frac{\partial^2 u_i^{r+}}{\partial x_k^+ \partial x_j^+}} \right)^2 \quad (25)$$

スカラー散逸率の輸送方程式における各項の定義式は、乱流エネルギー散逸率輸送方程式の対応する項と非常に良く似ている。このことは、スカラー散逸率輸送方程式における各項の分布が、乱流エネルギー散逸率輸送方程式のそれと類似することを示している。図4より確かに、スカラー一場と速度場における各項の分布は、全体的に良く似た挙動を示すことがわかる。しかし、有意な差異が  $y^+ < 5$  の領域において  $\gamma_{\varepsilon_\theta}^+$  と  $\gamma_\varepsilon^+$  に見られる(図4(a)参照)。両者に違いが生じた理由を調べるため、速度変動と温度変動に関する壁面漸近展開式(26)~(29) [9,10]を用いて、式(16)及び(25)に関する壁面漸近挙動を求める。

$$u^{r+} = b_1 y^+ + c_1 y^{+2} + d_1 y^{+3} + \dots \quad (26)$$

$$v^{r+} = c_2 y^{+2} + d_2 y^{+3} + \dots \quad (27)$$

$$w^{r+} = b_3 y^+ + c_3 y^{+2} + d_3 y^{+3} + \dots \quad (28)$$

$$\theta^{r+} = b_\theta y^+ + d_\theta y^{+3} + \dots \quad (29)$$

$$\gamma_{\varepsilon_\theta}^+ = A_{\varepsilon_\theta} + C_{\varepsilon_\theta} y^{+2} + \dots \quad (30)$$

$$\gamma_\varepsilon^+ = A_\varepsilon + B_\varepsilon y^+ + C_\varepsilon y^{+2} + \dots \quad (31)$$

$$A_{\varepsilon_\theta} = \frac{4}{Pr^2} \left\{ \overline{(b_{\theta,1})^2} + \overline{(b_{\theta,3})^2} \right\}$$

$$A_\varepsilon = 4 \left\{ 2 \left( \overline{c_1^2} + \overline{c_2^2} + \overline{c_3^2} \right) + \overline{(b_{1,1})^2} + \overline{(b_{1,3})^2} + \overline{(b_{3,1})^2} + \overline{(b_{3,3})^2} \right\}$$

$$B_\varepsilon = 48 \left\{ \overline{c_1 d_1} + \overline{c_2 d_2} + \overline{c_3 d_3} \right\} + 16 \left\{ \overline{b_{1,1} c_{1,1}} + \overline{b_{1,3} c_{1,3}} + \overline{b_{3,1} c_{3,1}} + \overline{b_{3,3} c_{3,3}} \right\}$$

$$C_{\varepsilon_\theta} = \frac{2}{Pr^2} \left\{ \overline{(b_{\theta,11})^2} + \overline{(b_{\theta,33})^2} + 2 \overline{(b_{\theta,13})^2} + 36 \overline{d_\theta^2} + 12 \left( \overline{b_{\theta,1} d_{\theta,1}} + \overline{b_{\theta,3} d_{\theta,3}} \right) \right\}$$

$$C_\varepsilon = 2 \left\{ \overline{(b_{1,11})^2} + \overline{(b_{1,33})^2} + \overline{(b_{3,11})^2} + \overline{(b_{3,33})^2} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 &+ 16 \left\{ \overline{(c_{1,1})^2} + \overline{(c_{1,3})^2} + \overline{(c_{2,1})^2} + \overline{(c_{2,3})^2} + \overline{(c_{3,1})^2} + \overline{(c_{3,3})^2} \right\} \\
 &+ 24 \left\{ 3 \left( \overline{d_1^2} + \overline{d_2^2} + \overline{d_3^2} \right) + 4 \left( \overline{c_1 e_1} + \overline{c_2 e_2} + \overline{c_3 e_3} \right) + \overline{b_{1,1} d_{1,1}} + \overline{b_{1,3} d_{1,3}} + \overline{b_{3,1} d_{3,1}} + \overline{b_{3,3} d_{3,3}} \right\} \\
 &+ 8 \left\{ \overline{(b_{1,13})^2} + \overline{(b_{3,13})^2} \right\}
 \end{aligned}$$

式(30)より、 $B_{\varepsilon_\theta} = 0$ となることがわかる。また、図4(a)より、 $B_\varepsilon < 0$ と考えられる。 $C_{\varepsilon_\theta}$ 及び $C_\varepsilon$ は、ほとんど二乗の項で構成されているため、 $C_{\varepsilon_\theta} > 0, C_\varepsilon > 0$ と考えられる。以上より、 $y^+ < 5$ で観察された $\gamma_{\varepsilon_\theta}^+$ と $\gamma_\varepsilon^+$ の分布の違いは、壁面漸近展開式における $y^+$ の係数が異なることに起因している。詳細な式展開や証明は、当研ホームページ(<http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence/>)に掲載されている。

### 4.3 スカラー散逸率の収支におけるレイノルズ数・プラントル数依存性

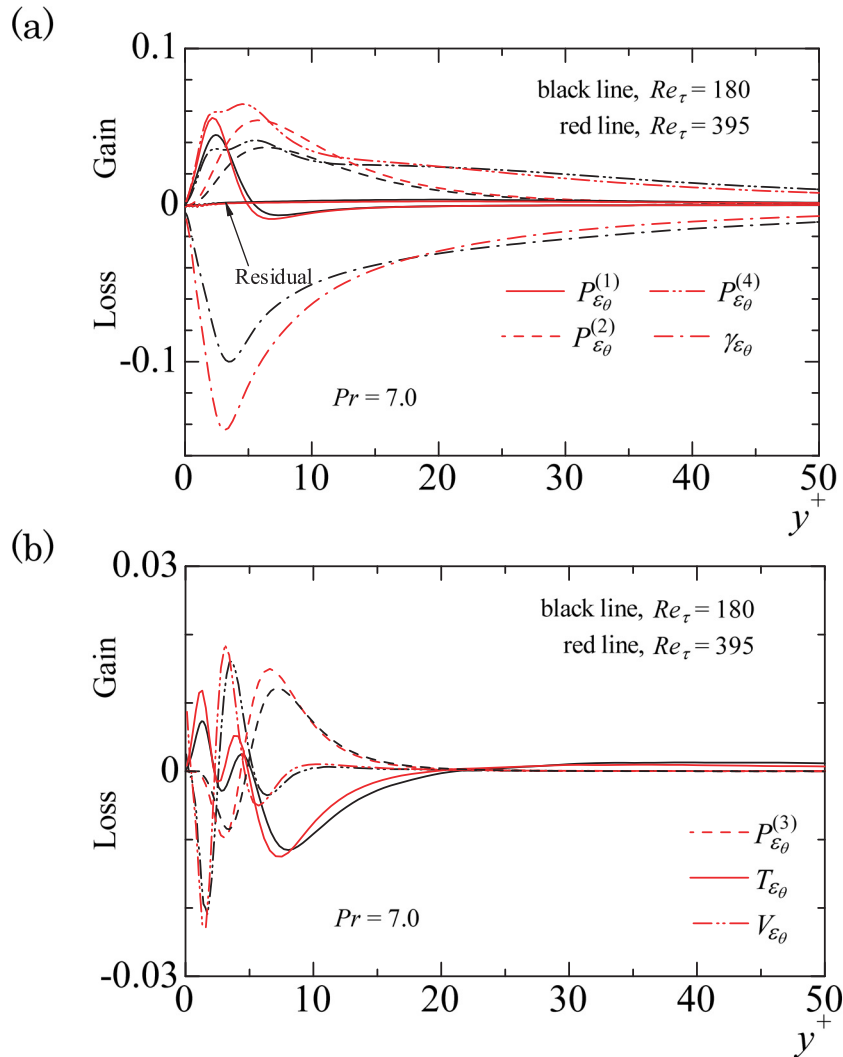


図5  $Pr = 7.0$ におけるスカラー散逸率の収支：(a) 値の大きな項，(b) 比較的値の小さな項。

プラントル数  $Pr = 7.0$ におけるスカラー散逸率の収支を図5に示す。Abe et al. [11]は、 $Re_\tau = 180 \sim 640$ の範囲では、 $Pr = 0.71$ におけるスカラー散逸率の収支に対するレイノルズ数の影響は、乱流エネルギー散逸率のそれと非常に似た傾向を示すと指摘している。彼らは、 $P_{\varepsilon}^{(1)}, P_{\varepsilon}^{(2)}, P_{\varepsilon}^{(4)}$ は

壁面近傍でレイノルズ数の影響を受ける一方で、 $P_{\varepsilon}^{(3)}$  にはレイノルズ数依存性がほとんど存在しないことを報告している。図5より、より高いプラントル数である  $Pr = 7.0$  においても、生成項のレイノルズ数依存性に関して同様の傾向が見える。つまり、 $Re_{\tau} = 180 \sim 395$  の範囲では、 $P_{\varepsilon}^{(3)}$  に対するレイノルズ数の影響はチャンネル幅全域にわたり無視できるほど小さく、他の生成項はレイノルズ数の増加に伴い壁面近傍に見られるピーク値が増加する。

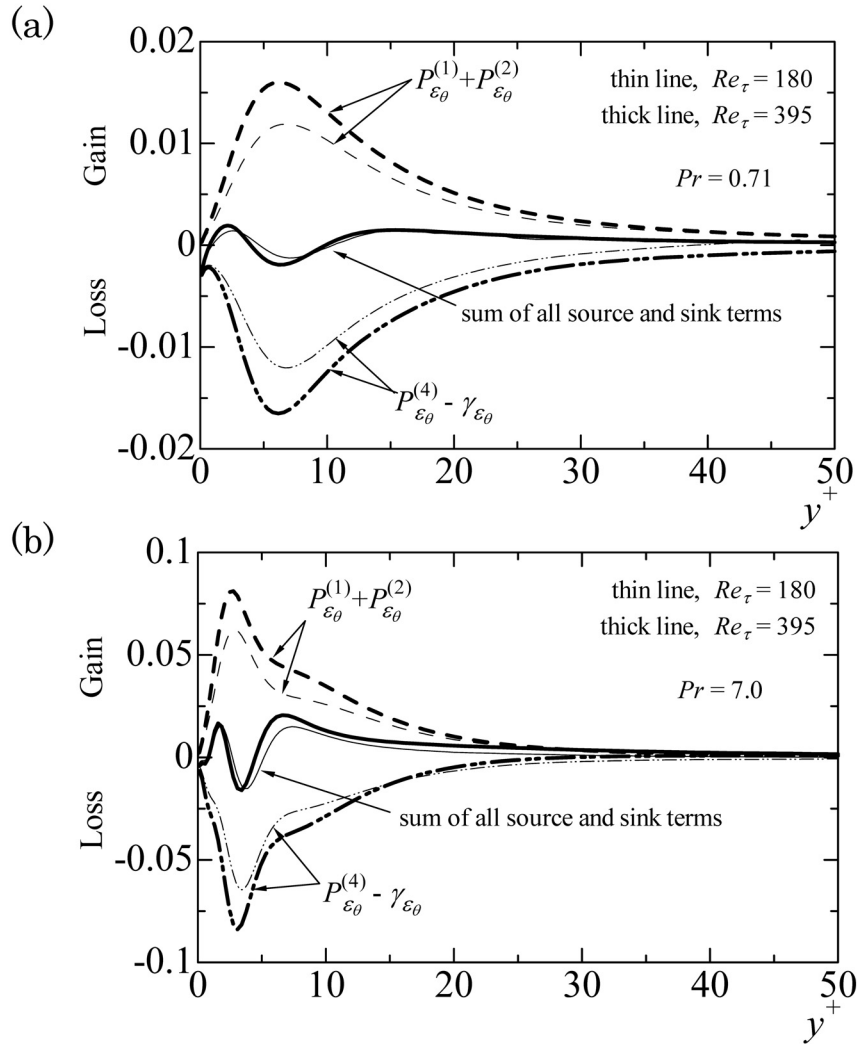


図6 スカラー散逸率の輸送方程式における各項の和 : (a)  $Pr = 0.71$ , (b)  $Pr = 7.0$ .

スカラー散逸率の輸送方程式における各項の和を図6に示す。Rodi et al. [8] は  $\varepsilon$  の収支について調査し、いくつかの生成項の和は壁面近傍でレイノルズ数の影響を大きく受けるが、生成項と消散項の和(sum of all source and sink terms)はレイノルズ数の影響をあまり受けないと述べている。スカラー散逸率の収支についても同様に、 $Re_{\tau} = 180 \sim 395$ ,  $Pr = 0.71 \sim 7.0$  の範囲では、 $P_{\varepsilon}^{(1)} + P_{\varepsilon}^{(2)} + P_{\varepsilon}^{(3)} + P_{\varepsilon}^{(4)} - \gamma_{\varepsilon\theta}$  に対するレイノルズ数の影響は小さいことがわかる(図6参照)。Rodi et al. [8] はさらに、 $P_{\varepsilon}^{(1)} + P_{\varepsilon}^{(2)}$ ,  $P_{\varepsilon}^{(4)} - \gamma_{\varepsilon\theta}$  についても精査し、壁から離れた領域ではどちらの項にも顕著なレイノルズ数依存性は観察されないが、壁面近傍ではレイノルズ数が増加するにつれて両者とも増加することを報告している。図6より、 $\varepsilon$  の収支同様、 $Pr = 0.71 \sim 7.0$  における  $\varepsilon_{\theta}$  の収支についても良く似た傾向を示す。すなわち、壁から離れた領域における  $P_{\varepsilon}^{(1)} + P_{\varepsilon}^{(2)}$ ,  $P_{\varepsilon}^{(4)} - \gamma_{\varepsilon\theta}$  の分布に、有意なレイノルズ数依存性は観察されない。一方で、壁面近くでは、レイノルズ数の増加に伴いピーク値が増加し、明確なレイノルズ数依存性が存在する。

#### 4.4 スカラー散逸率輸送方程式モデルのアプリオリテスト

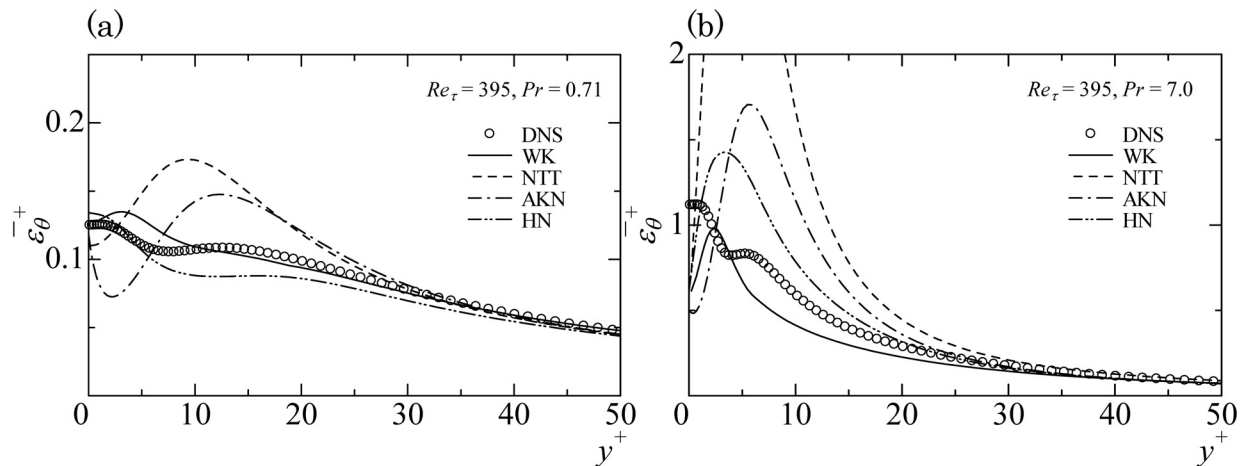


図7 スカラー散逸率のモデル予測：(a)  $Pr = 0.71$ , (b)  $Pr = 7.0$ .

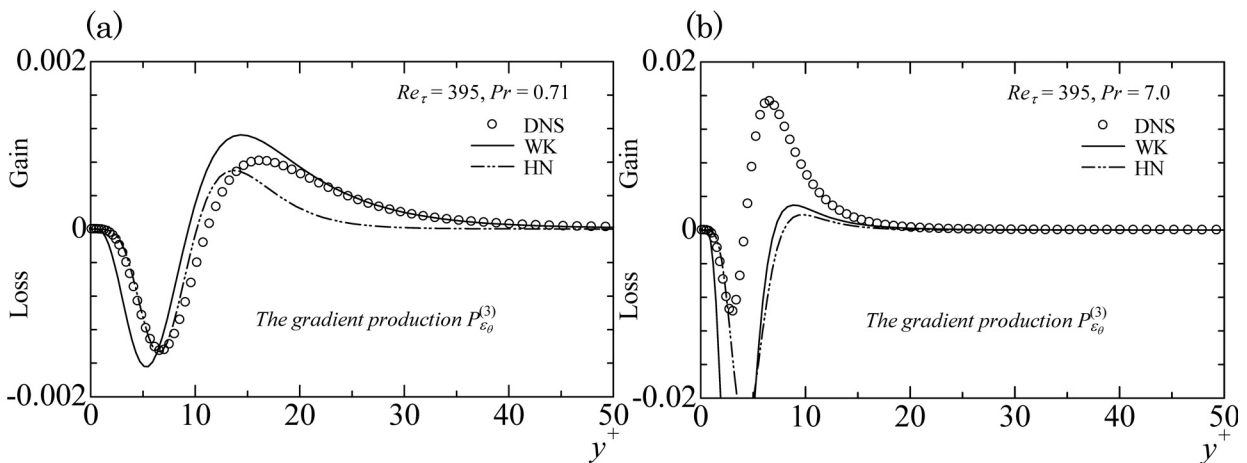


図8 Gradient production 項のモデル予測：(a)  $Pr = 0.71$ , (b)  $Pr = 7.0$ .

スカラー散逸率の輸送方程式モデルの評価を行う。モデルによる結果と本研究で得られた DNS データを比較することで、より高精度なモデルの構築に資する有用な知見を得る。今回はスカラー散逸率  $\varepsilon_\theta$  ( $\tilde{\varepsilon}_\theta$ ) の収支に対するプラントル数依存性に注目するため、レイノルズ数は、 $Re_\tau = 395$  で一定とし、 $Pr = 0.71, 7.0$  の 2 ケースの計算を行う。Nagano et al. [12] (以降, NTT), Abe et al. [13] (以降, AKN), 若尾ら [14] (以降, WK), Hattori et al. [15] (以降, HN) が考案したモデルをテストする。厳密に調査するため、 $\varepsilon_\theta$  ( $\tilde{\varepsilon}_\theta$ ) を除く全ての乱流統計量は、本研究の DNS データの値を代入した。使用したモデル式やモデル定数・関数などは、上述の論文を参照されたい。

スカラー散逸率のモデル予測の結果を図 7 に示す。図 7 (a) に見られるように、 $Pr = 0.71$  の場合、壁から離れた領域では全ての評価モデルは DNS と良く一致している。壁面に近づくとき、 $y^+ < 20$  の領域で顕著な差異が見られる。WK と HN は、比較的良好に予測できている。プラントル数が増加すると、壁から離れた領域では DNS と良い一致を示すものの、壁面近傍では全てのテストモデルが DNS と著しくずれる(図 7 (b) 参照)。壁面上では、 $\varepsilon_\theta^+$  の壁面漸近展開より、

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta^+}{\partial y^+} = 0 \tag{32}$$

が得られる(式(6)参照)。プラントル数が  $Pr = 0.71$  の場合、WK, NTT, HN がこの関係式を満足している。しかし、 $Pr = 7.0$  の場合では、これらのモデルは壁面漸近挙動の予測が困難となる。

AKN が評価モデルの中で最も良い予測を示している。

生成項  $P_{\varepsilon_\theta}^{(3)}$  のモデル予測を図 8 に示す。この項は、他の生成項や支配的な項に対して 1/10 のオーダーなので、全体の収支から見れば、 $P_{\varepsilon_\theta}^{(3)}$  の寄与分は小さい。しかし、スカラー散逸率輸送方程式のモデリングに重要な  $T_{\varepsilon_\theta}$  や  $P_{\varepsilon_\theta}^{(1)} + P_{\varepsilon_\theta}^{(2)'} + P_{\varepsilon_\theta}^{(3)} + P_{\varepsilon_\theta}^{(4)} - \gamma_{\varepsilon_\theta}$  と同じオーダーであるため、 $P_{\varepsilon_\theta}^{(3)}$  の厳密なモデル式を開発することは非常に重要である。プラントル数  $Pr = 0.71$  の場合、WK 及び HN のモデル予測は DNS と良く一致している。しかし、 $Pr = 7.0$  の場合では、これらのモデルは  $P_{\varepsilon_\theta}^{(3)}$  を過大評価しており、プラントル数の増加に伴い差異が著しく増加する。

以上まとめると、今回テストした既存モデルは、 $Pr \approx 1.0$  のケースでは比較的有効な予測を示すことがわかった。しかし、プラントル数が 7.0 まで増加すると、いずれのモデルも壁面近傍におけるスカラー散逸率やその収支を正確に予測することが困難となる。各評価モデルは、高プラントル数に関する正確な情報が少ない頃に開発されたモデルなので、DNS との違いがでてしまうのは当然である。従って、広範なプラントル数の影響を考慮したスカラー散逸率輸送方程式モデルを構築する必要がある。

## 5. 結言

本研究では、スカラー場における最小スケールをできる限り捉え得る細かな空間解像度を用いて、平行平板間乱流熱伝達の DNS を実施し、スカラー散逸率の収支に対するレイノルズ数・プラントル数依存性やスカラー散逸構造を調査した。また、スカラー散逸率輸送方程式モデルのアプリオリテストを行った。以下に得られた知見を示す。

- スカラー散逸場と乱流エネルギー散逸場は、定義式がお互いに非常に良く似ているにも関わらず、空間的な分布は異なることがわかった。強いスカラー散逸は主に微細渦の周囲に形成される一方で、乱流エネルギー散逸は、渦芯部及び渦周囲に形成される。温度勾配が渦運動により継続的な変形を受けることにより、強いスカラー散逸場は渦芯付近にも生じるようになる。
- スカラー散逸率と乱流エネルギー散逸率の収支を比較し、壁面近傍における  $\gamma_{\varepsilon_\theta}^+$  と  $\gamma_{\varepsilon_\theta}^+$  の分布の違いが見られる。これは、両者の壁面漸近展開式における  $y^+$  の係数の値に起因している。
- レイノルズ数  $Re_\tau = 180 \sim 395$  の範囲で、 $Pr = 0.71$  と  $Pr = 7.0$  におけるスカラー散逸率の収支に対するレイノルズ数の影響を調査し、各項のレイノルズ数依存性は  $Pr = 0.71 \sim 7.0$  では、良く似た傾向を示すことがわかった。
- 生成項と消散項の和に対するレイノルズ数の影響は、 $Re_\tau = 180 \sim 395$ ,  $Pr = 0.71 \sim 7.0$  の範囲において、チャンネル全体にわたり小さい。
- スカラー散逸率輸送方程式モデルのアプリオリテストを実施し、本研究のレイノルズ数とプラントル数の範囲では、プラントル数が増加するにつれ、既存モデルの予測精度は大幅に減少することがわかった。プラントル数  $Pr = 0.71$  の場合、WK 及び HN のモデル予測は DNS と良く一致している。しかし、 $Pr = 7.0$  の場合では、これらのモデルは、 $P_{\varepsilon_\theta}^{(3)}$  を過大評価しており、プラントル数の増加に伴い差異が著しく増加する。

## 謝辞

本研究は、東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータを利用することで実現することができた。OpenMPによる並列化やデータ処理の高速化等の際には、センタースタッフから有益なご指導とご協力をいただいた。記して感謝の意を表す。

## 参考文献

- [1] Kim, J. and Moin, P., "Transport of passive scalars in a turbulent channel flow", *Turbulent Shear Flows 6*, Springer, Berlin, pp. 85-96, 1989.
- [2] Kasagi, N., Tomita, Y. and Kuroda, A., "A direct numerical simulation for passive scalar field in a turbulent channel flow", *ASME Journal of Heat Transfer*, **114**, pp. 598-606, 1992.
- [3] Kawamura, H., Abe, H. and Matsuo, Y., "DNS of turbulent heat transfer in a channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **20**, pp. 196-207, 1999.
- [4] Abe, H., Kawamura, H. and Matsuo, Y., "Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 1020$  with  $Pr = 0.025$  and  $0.71$ ", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **25**, pp. 404-419, 2004.
- [5] Tiselj, I., Pogrebnyak, E., Li, C., Mosyak, A. and Hetsroni, G., "Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume", *Phys. Fluids*, **13**, pp. 1028-1039, 2001.
- [6] Na, Y., Papavassiliou, D. V. and Hanratty, T. J., "Use of direct numerical simulation to study the effect of Prandtl number on temperature fields", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **20**, pp. 187-195, 1999.
- [7] 鈴木哲也, 河村洋, "乱流の数値シミュレーションにおける差分式の整合性", *日本機械学会論文集 B*, **60-578**, pp. 3280-3286, 1994.
- [8] Rodi, W. and Mansour, N. N., "Low Reynolds number  $k-\varepsilon$  modelling with the aid of direct simulation data", *J. Fluid Mech.*, **250**, pp. 509-529, 1993.
- [9] 社団法人日本機械学会編, 新編 伝熱工学の進展 第二巻, 養賢堂, 1996.
- [10] Antonia, R. A. and Kim, J., "Turbulent Prandtl number in the near wall region of a turbulent channel flow", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **34**, pp. 1905-1908, 1991.
- [11] Abe, H., Antonia, R. A. and Kawamura, H., "Transport equations for the enstrophy and scalar dissipation rate in a turbulent channel flow", *Proc. 7th Int. Symp. on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, Vol 3, pp. 750-755, 2008.
- [12] Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T., "An improved two-equation heat transfer model for wall turbulent shear flows", *Proc. ASME/JSME Thermal Engineering Joint Conference*, Vol. 3, pp. 233-240, 1991.
- [13] Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., "A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flow-II Thermal field calculations", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **38**, pp. 1467-1481, 1995.
- [14] 若尾泰文, 河村洋, "平行平板間乱流における線形性原理に基づくスカラー輸送のモデリング", *日本機械学会論文集 B*, **62-603**, pp. 3934-3942, 1996.
- [15] Hattori, H. and Nagano, Y., "Rigorous formulation of two-equation heat transfer model of turbulence using direct numerical simulations", *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, **33**, pp. 152-180, 1998.