

## [共同研究成果]

## 高度な乱流散逸構造の解像度を有する Vector-Parallel DNS の研究

— High-resolution vector-parallel DNS study for turbulence dissipative structure —

堀内 潔, 齋藤 憲作

東京工業大学大学院 理工学研究科 機械宇宙システム専攻

## 1. はじめに

乱流の Kolmogorov の $-5/3$ 乗則<sup>(1)</sup>は, 大きなスケールから小さなスケールへとエネルギーが伝達されていく乱流のエネルギーカスケードを示す重要なスペクトルである. しかしながら, 近年の高レイノルズ数 DNS においては,  $-5/3$ 乗スペクトルからの変動が見出されている<sup>(2)</sup>. また,  $-5/3$ 乗則に加え非平衡・非定常性を表す $-7/3$ 乗のスペクトルが解析的なアプローチから導出されており, 階層的な構造を有するエネルギースペクトルの存在が示唆される. このようなスペクトルに伴うエネルギー伝達機構を解明することは, 新たな乱流制御手法の提案や large-eddy simulation の非平衡な subgrid-scale モデル開発等に役立てる事が可能である. そこで本研究では一様等方乱流の DNS データを用いて $-7/3$ 乗のスペクトルを抽出し, 乱流構造との相関及び非線形相互作用(triad interaction)によるエネルギー伝達機構の詳細を解明することを目的としている.

## 2. 一様等方乱流の DNS

本研究で対象とする流れ場は非圧縮性一様等方強制乱流であり, 計算領域の長さを全方向に  $2\pi$ , 格子点数を  $N=512^3$ , 動粘性係数は  $\nu=1.38\times 10^{-3}$ , 時間刻みは  $\Delta t=0.0005$  として生成した. 計算方法は空間の離散化には高い計算精度が得られるスペクトル法を用いエイリアシング誤差は  $3/2$ 則を用いて除去した. 時間積分には低記憶容量型 3 次精度 Runge-Kutta 法を用いた. 外力は時間に関してデルタ関数の相関を持ち, 統計的に等方性が成り立つように, 各時間ステップごとに注入する. 外力のスペクトル  $E_f(k)$  は,  $1.0 \leq k \leq 2.5$  の波数については一定値  $c_f$  とし, その位相は  $[0, 2\pi]$  の一様乱数により与えた<sup>(3)</sup>.  $E_f(k)$  の大きさは  $k$  によらず一定値  $c_f$  としている. 本研究では  $c_f=0.0625$  とした. 外力は毎ステップごとに加え, 8 ステップごとにその値を更新した. 表 1 に一様等方乱流の計算条件及び DNS により得られた統計量, 図 1 に乱流エネルギー及び散逸率の時間変動を示す. ここで,  $\langle \cdot \rangle$  は時間平均を示している. Phase 1, Phase 2 については §4 を参照されたい.

## 3. 乱流構造の抽出法と多重モード spiral vortex

乱流中の渦構造は旋回運動を伴う管状の構造を持つ渦管と層状の構造を持つ渦層に大別される. 本研究においては渦管は速度勾配テンソルの第二不変量  $Q$  により抽出した<sup>(4)</sup>. また, 渦層の抽出法としてひずみ速度テンソル  $S_{ij}$  と渦度テンソル  $\Omega_{ij}$  の積からなる  $A_{ij} = -(S_{ik}\Omega_{kj} + S_{jk}\Omega_{ki})$  項の固有値  $[A_{ij}]_{\pm} = -(S_{ik}\Omega_{kj} + S_{jk}\Omega_{ki})_{\pm}$  を用いる<sup>(5)</sup>. 2 階テンソルの固有値  $\sigma_i$  に対しては, その固有ベクトルが渦度ベクトル  $\omega$  と最も平行なものを  $\sigma_s$ , 残りの 2 つの固有値のうち大きいものを  $\sigma_+$ , 小さいものを  $\sigma_-$  とする順序付けを行う.

Lundgren<sup>(6)</sup> は中心部の渦管とその周囲に存在する二葉の螺旋状の渦層とからなる spiral vortex のモデルを提案した. この spiral vortex は渦管と渦層上の渦度ベクトルの幾何学的な配向によって 3 つの Mode に分類することができる. Lundgren は Mode 1 の spiral vortex は $-5/3$ 乗則に従うエネルギースペクトルを, Pullin and Lundgren は Mode 3 の spiral vortex は $-7/3$ 乗則に従うエネルギースペクトルを誘起することを解析的に示している<sup>(7)(8)</sup>.

表 1 DNS データの統計量

$k_{max} \bar{\eta}$  : grid resolution  $R_\lambda$ : Taylor microscale Reynolds number  
 $\langle K \rangle$  : average kinetic energy  $\langle \varepsilon \rangle$  : average dissipation rate  
 $L$ : integral length scale  $\lambda$ : Taylor microscale  
 $\bar{\eta}$ : average Kolmogorov length  $T$ : eddy turnover time due to forcing  
 $\langle u_i f_i \rangle$  : average rate of energy addition

	Total	Phase 1 ( $\dot{\varepsilon} \geq 0$ )	Phase 2 ( $\dot{\varepsilon} < 0$ )
$k_{max} \bar{\eta}$	2.27	2.27	2.28
$R_\lambda$	158.82	165.86	151.61
$\langle K \rangle$	1.423	1.494	1.350
$\langle \varepsilon \rangle$	0.399	0.403	0.394
$L$	1.147	1.160	1.134
$\lambda$	0.220	0.225	0.216
$\bar{\eta}$	0.008901	0.00864	0.008932
$T$	6.45	6.27	6.62
$\langle u_i f_i \rangle$	0.356		

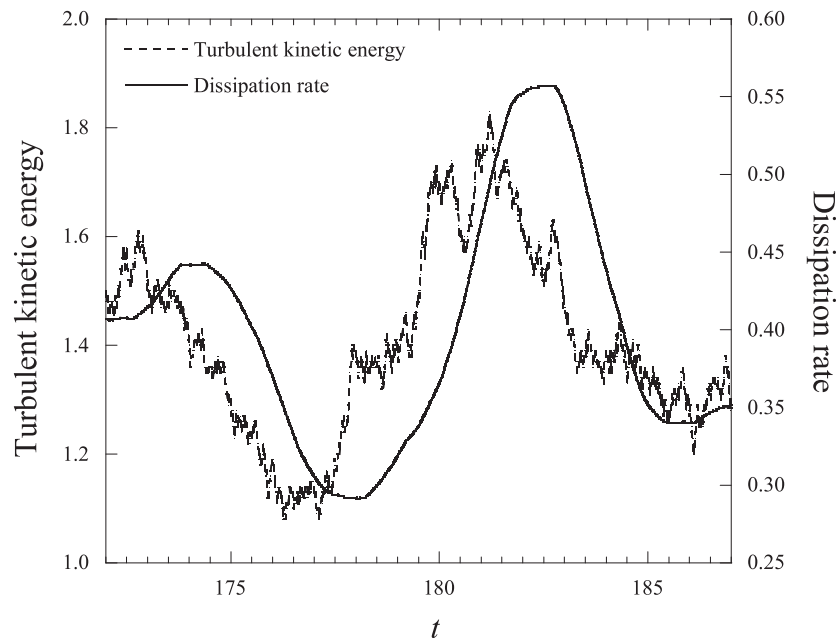


図 1 DNS データにおける乱流エネルギーと散逸率の時間変動  
 破線：乱流エネルギー 実線：散逸率

#### 4. 階層的エネルギースペクトルの抽出

Yoshizawa<sup>(9)</sup>はTSDIA(two-scale direct-interaction approximation)を用いてKolmogorovの-5/3乗スペクトルを基本解としたエネルギースペクトルの摂動展開を行い、次式のように-7/3乗を含むスペクトルを得た。Woodruff and Rubinstein<sup>(10)</sup>はmulti-scale摂動法を一様等方性乱流におけるスペクトルの展開に用いられるHeisenberg modelに適用した。Heisenberg modelは様々な運動スケール間の乱流エネルギー伝達に対する非線形相互作用の役割を捉えた最もシンプルなclosureである。Heisenberg closureではエネルギー伝達スペクトル関数はエネルギースペクトルの汎関数である。このモデルを用いてKolmogorovの-5/3乗則を基本解としてエネルギースペクトルの摂動展開を行い次式が得られる。

$$E(k) \approx C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + C_1 \dot{\varepsilon} \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} + C_3 \left[ \ddot{\varepsilon} \varepsilon^{-1} - 2 \dot{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2/3} \right] k^{-9/3} + \dots \quad (1)$$

ここに、 $\dot{\varepsilon}$ は $\varepsilon$ の時間に関する微分であり、ここでは時間スケールとして $\dot{\varepsilon}/\varepsilon$ が用いられている。上式は階層的なスケール指数を含んだスペクトルであり、第二項と第三項は散逸率 $\varepsilon$ の変動によって誘起される。この式の長時間平均を取ると、第二項はゼロになる。さらに、散逸率 $\varepsilon$ の2乗が小さいと仮定すると第三項は無視でき、Kolmogorovの-5/3乗則エネルギースペクトル $E(k)$ の長時間平均は

$$\langle E(k) \rangle \approx E_0(k) \quad (2)$$

と表せる。すなわち通常の長時間平均では定常性を仮定した-5/3乗のスペクトルしか抽出することができない。ここで、散逸率の時間変動 $\dot{\varepsilon}$ の符号に条件付き平均を施し、散逸率 $\varepsilon$ の時間微分が正值をとるPhase 1と負値をとるPhase 2に分類することで以下のように表せる。

$$\begin{cases} E^+(k) = E_0(k) + E_1^+(k) & (\text{when } \dot{\varepsilon} < 0 : \text{Phase 1}) \\ E^-(k) = E_0(k) + E_1^-(k) & (\text{when } \dot{\varepsilon} > 0 : \text{Phase 2}) \end{cases} \quad (3)$$

ここで $E_1^-(k) \doteq -E_1^+(k)$ であることに注意すると、 $E_0(k)$ 、 $E_1^+(k)$ は

$$\begin{aligned} E_0(k) &= \frac{1}{2} \{ E^+(k) + E^-(k) \} \\ E_1^+(k) &= \frac{1}{2} \{ E^+(k) - E^-(k) \} \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。図2に、この条件付き平均を用いてDNSデータから抽出したエネルギースペクトルを示す。赤線は $E_0(k)$ を、青線は $E_1^+(k)$ の絶対値を示している。図中の低波数領域( $0 \leq k\eta \leq 0.2$ ; 慣性領域)において、 $E_0(k)$ は-5/3乗則に、 $E_1^+(k)$ の絶対値が-7/3乗則に従うことが確認できる。ここでKolmogorov定数は $C_K \approx 1.61$ となり、Gotoh *et al.*<sup>(3)</sup>が得た結果と良く一致する。また、-7/3スペクトルの定数 $C_1$ はKolmogorov定数 $C_K$ より僅かに小さい。

図3に絶対値を取らない $E_1^+(k)$ 、 $E_1^-(k)$ の分布を示す。青線が $E_1^+(k)$ 、赤線が $E_1^-(k)$ を表しており、 $k\eta \approx 0.2$ で $E_1^+(k)$ は正から負に、 $E_1^-(k)$ は負から正に符号の反転が生じていることがわかる。次に長時間平均をとったエネルギースペクトル $E_0(k)$ からの変動の等高線と、乱流エネルギー $K$ 及び散逸率 $\varepsilon$ の時間変化との比較を図4に示す。ここで赤色に近いほど $E_0(k)$ から大きく正值に変動しており、青色に近いほど大きく負値に変動していることを示している。散逸率 $\varepsilon$ の時間変化が正值のPhase 1 ( $178.0 < k < 182.0$ )において低波数領域( $0 < k\eta < 0.2$ )で変動が正值を、高波数領域( $0.2 < k\eta$ )では負値を示している。

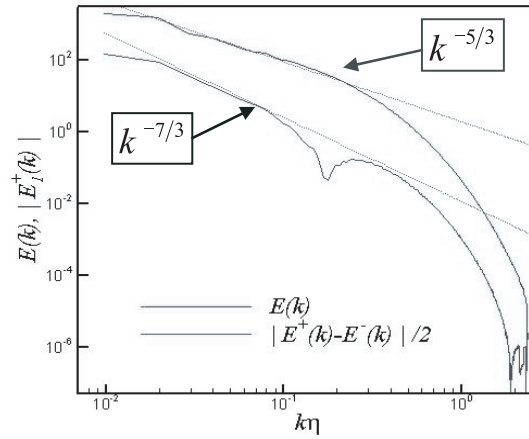


図2 DNS データから得られたエネルギースペクトルの絶対値

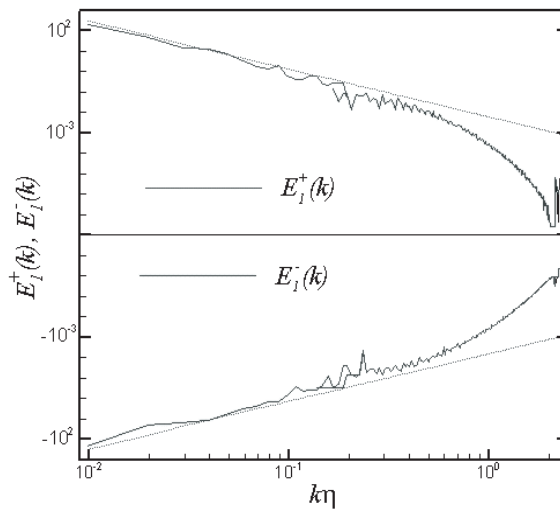


図3 DNS データから得られたエネルギースペクトル  
 灰色の実線： $E_1^+(k)$ ，黒の実線： $E_1^-(k)$ ，破線： $-7/3$  乗の勾配

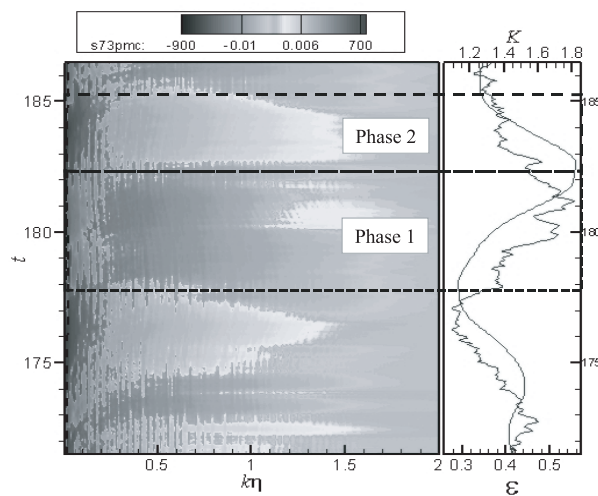
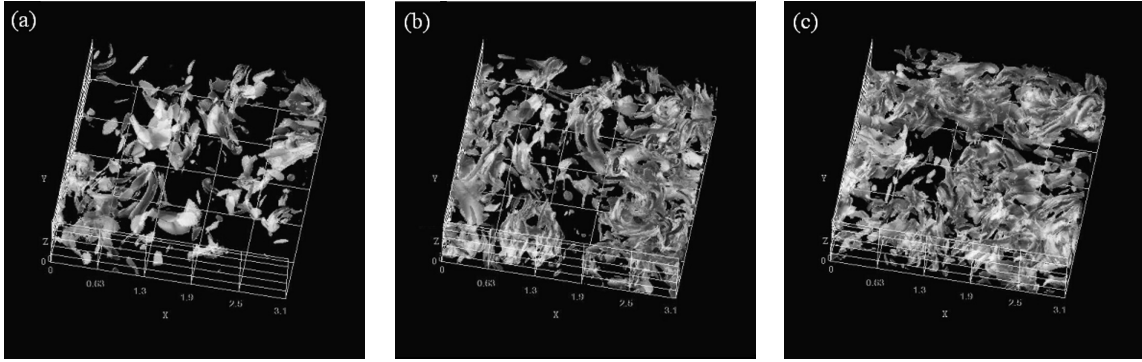


図4  $E_1^+(k)$ と $E_1^-(k)$ の等高線（左枠）及び  
 乱流エネルギー $K$ と散逸率 $\varepsilon$ の時間変動（右枠）



(a)  $t = 180.0$  (Phase 1)      (b)  $t = 182.0$       (c)  $t = 183.0$  (Phase 2)  
 図 5 : 乱流構造の時間変化    白色 : 渦層,  $[A_{ij}]_+ = 900$ , 灰色 : 渦管,  $Q = 753.0$

つまり Phase 1 においては大きなエネルギーを持つ大スケールの渦構造が発達し、乱流エネルギーが極大値をとる。また、散逸率  $\varepsilon$  の時間変化が負値の Phase 2 ( $182.0 < t < 186.0$ ) においては逆の傾向が示されており、低波数領域で変動が負値を、高波数領域では正值を示している。即ち、Phase 2 では小スケールの渦構造が発達し、乱流エネルギーは極小値をとる。ここで図 5 は DNS データから抽出した乱流構造を可視化した図であり、赤色の等値面は渦管を、灰色の等値面は渦層を示している。図 5(a) の  $t = 180.0$  (Phase 1) においては、大きな渦構造が支配的であるが、(b) の  $t = 182.0$ 、(c) の  $t = 183.0$  と、Phase 2 に移行するにつれて小規模な構造が支配的となることが確認でき、エネルギースペクトルの変動とよく一致した結果が得られた。

Phase 1 においては、 $-7/3$  乗則を生成する Mode 3 の spiral vortex が多数観察されたが、Phase 2 においては、これらの spiral vortex が  $-5/3$  乗則を生成する Mode 1 に変換されることが確認された。この spiral vortex の遷移は、上述の  $-7/3$  乗則スペクトルの時間発展と整合している。

## 5. Triad interaction の解析

エネルギーエネルギースペクトルの変動成分の符号変化は、乱流のエネルギーカスケード及び散逸と重要な相関関係があると考えられる。このエネルギー変動のメカニズムを解明するため、非線形相互作用(triad interaction)による波数  $k$  のフーリエ成分のエネルギー増加を表すエネルギー伝達関数の解析を行った。

$$T(k) = \frac{1}{2} \text{Im} \left[ \sum_{k-1/2 \leq |k| \leq k+1/2} \tilde{u}_n^*(\mathbf{k}) \tilde{P}_{nlm}(\mathbf{k}) \sum_p \tilde{u}_l(\mathbf{p}) \tilde{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \right] \quad (5)$$

ここで、 $\tilde{u}(\mathbf{k})$  は速度ベクトルのフーリエ変換、 $*$  は共役複素数、 $\tilde{P}_{nlm}$  は orthogonalising operator、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトルである<sup>(11)</sup>。図 6 に  $\varepsilon \bar{\eta}$  によって正規化されたエネルギー伝達関数の時間平均からの変動成分である事に対する変化と乱流エネルギー及び散逸率の時間変化との比較を示す。この図から、 $k \bar{\eta} \approx 0.5$  において図 4 のエネルギースペクトルの変動と同様に符号の入れ替わりが生じていることが見て取れる。Phase 1 ( $178.0 \leq t \leq 182.0$ ) では低波数領域 ( $k \bar{\eta} \leq 0.5$ ) において強いエネルギーゲインが存在し、それが高波数へと伝達されていく顕著なエネルギーカスケードが確認される。しかし Phase 2 ( $182.0 \leq t < 186.0$ ) においては低波数領域 ( $k \bar{\eta} \leq 0.5$ ) のエネルギーゲインは減少し、負値が支配的となる。これは Phase 1 において大きなエネルギーを持つ大規模な構造が発達し、Phase 2 に移行するにつれてエネルギーが小スケールへの構造へと伝達されることを示しており、§4 のエネルギースペクトルの変動(図 4)及び乱流構造の可視化(図 5)とも整合している。

図 7 はより低波数領域における正規化されたエネルギー伝達関数と乱流エネルギー、散逸率の時間変化の分布、図 11 は主枠内で  $1000 \Delta t (\approx \tau_k)$  の時間平均を施したエネルギー伝達関数の分布を、



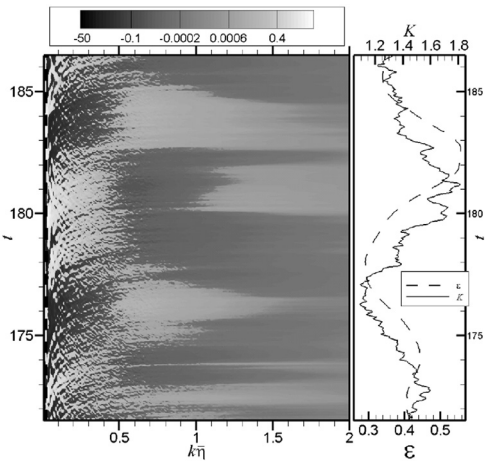


図 6  $\varepsilon\bar{\eta}$  によって正規化したエネルギー伝達関数の等高線 (左枠) 及び乱流エネルギー  $K$  と散逸率  $\varepsilon$  の時間変動 (右枠)

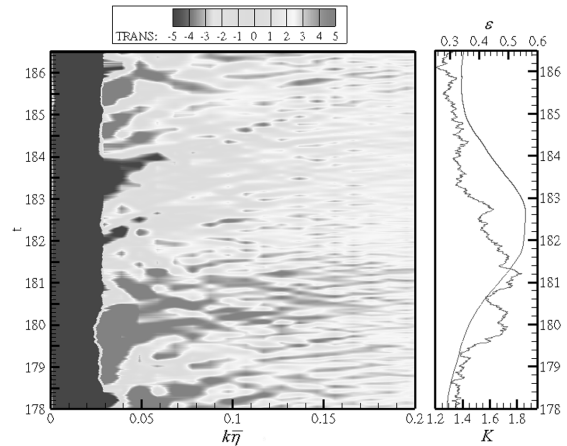


図 7 低波数領域における  $\varepsilon\bar{\eta}$  によって正規化したエネルギー伝達関数の等高線 (左枠) 及び乱流エネルギー  $K$  と散逸率  $\varepsilon$  の時間変動 (右枠)

小枠内で全時間及び Phase 1 及び Phase 2 で平均を取ったエネルギー伝達関数の分布を示している。小枠から、エネルギーゲインのピークは Phase 1 において  $k\bar{\eta} \approx 0.16$ 、Phase 2 において  $k\bar{\eta} \approx 0.20$  に存在していることが示され、全時間平均したエネルギー伝達関数と比較して Phase 1 においては正の変動を、Phase 2 においては負の変動をとっていることがわかる。次に主枠より、 $t = 179.5$  において  $k\bar{\eta} \approx 0.04$  に非常に大きなピークが存在し、時間の経過とともにピークが高波数へと移っていくことが確認できる。ここで乱流中の最大渦のスケールを示す積分長を  $L$  とすると、 $k\bar{\eta} \approx 0.04$  は  $L/4$  のスケールであり、積分長から小スケールへとエネルギーがカスケードされていくことを示している。この  $t = 179.5$  におけるピークが表れる前に、 $t = 178.5$  の  $k\bar{\eta} \approx 0.06$  前後において負値が存在し、時間の経過とともに  $k\bar{\eta} \approx 0.04$  付近にピークが形成される。ここで  $k\bar{\eta} \approx 0.04$  は外力を注入している波数帯に近いので、このエネルギーゲインは外力の影響により生じたものとも考えられるが、図 7 の  $t = 178.5$  から  $t = 179.0$  の  $k\bar{\eta} = 0.05$  付近において負値が低波数から高波数へと伝達されており、この波数帯におけるエネルギーの逆輸送にもよると考えられる。このゲインのピークは  $t = 180.5$  においては高波数に移っている。図 4 からわかるように、 $t \approx 182.5$  において比較的短時間でエネルギーカスケードと Phase 1 から Phase 2 への遷移が生じるが、この Phase 1-2 の遷移に先立って  $t \approx 181.5$  の  $k\bar{\eta} \approx 0.06$  において再び負値が現れ、 $L/5$  に値するスケールの  $k\bar{\eta} \approx 0.05$  には弱い正のピークが生じる。このことからエネルギーは  $L/5$  のスケールに注入され、このエネルギーが高波数領域へと伝達されていくことがわかる。その後、Phase 2 の  $t \approx 183.0$  では  $k\bar{\eta} \leq 0.08$  に存在するエネルギーが失われ、小さなスケールへと伝達される。

以上の結果をまとめると、エネルギースペクトルの変動及びエネルギー伝達関数の変動は散逸率  $\varepsilon$  の時間変化が正值の Phase 1 において低波数領域で正值、高波数領域で負値を、 $\varepsilon$  の時間変化が負値の Phase 2 において低波数領域で負値、高波数領域で正值をとる。このような 2 つの Phase が交互に出現することで乱流中においてエネルギーが伝達されていくことが示された。

## 6. まとめ

本研究では一様等強制方乱流の DNS データを用い、散逸率 の条件付き平均を用いることで、長時間平均によって抽出される従来の Kolmogorov の $-5/3$  乗則に従うエネルギースペクトルに加え、非定常・非平衡性を表わす $-7/3$  乗のスペクトルが存在することを明らかにした。また、エネルギースペクトルの変動と多重モード spiral vortex の Mode 遷移との示し、triad interaction も用いてエネルギーカスケード機構の詳細を明らかにした。

## 7. FFT ライブラリーの検証

本研究では、ASL/SX のライブラリー、特に高速フーリエ変換を利用したが、その計算におけるバンクコンフリクトの発生について検証し、以下を示した。

- ・ ライブラリーDFR3BF においては、SX-7 では 2 飛びアクセスのバンク競合が発生するのに対し、SX-8 以降では 2 飛びアクセスが強化され競合がほとんど発生しなくなっている。
- ・ データ長が奇数の場合、バンク競合の発生率が偶数の場合に比べて増加し、実行時間も増加する。これは、高速フーリエ変換ではなく離散フーリエ変換が用いられる事に起因しているものと考えられる。

## 謝辞

本研究は東北大学サイバーサイエンスセンター共同研究のもと行われ、同センターの大規模科学計算システムを大いに利用させていただいた。ここに謝意を表す。

## 参考文献

- (1) Kolmogorov, A.N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *C. R. Acad. Sci. USSR* **30**, 301–305.
- (2) Kaneda Y., Ishihara T., Yokokawa, M. Itakura, K. and Uno, K., Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. Fluids* **15**(2003),L21-L34
- (3) Gotoh T., Fukayama D. and Nakano T., Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation., *Phys. Fluids*, **14** (2002), 1065–1081.
- (4) Kida S. and Miura H., Identification and analysis of vortical structures., *Eur.J.Mech. B/Fluids.*, **17**(1998), 471-488
- (5) Horiuti K. & Takagi Y., Identification method for vortex filaments in isotropic turbulence. *Phys.Fluids*, **17**(2005),121703
- (6) Bermojo-Moreno, I., Pullin, D.I. & Horiuti, K., Geometry of enstrophy and dissipation, grid resolution effects and proximity issues in turbulence. *J. Fluid Mech.*, **620** (2009), 121-166
- (7) Lundgren T. S., Strained spiral vortex model for turbulent fine structure., *Phys. Fluids*, **25**(1982),2193-2203.
- (8) Horiuti, K. & Fujisawa, T., The multi mode stretched spiral vortex in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **595** (2008), 341-366
- (9) Lundgren T. S., A small-scale turbulence model. *Phys. Fluids A* **5**(1993),1472-1483.
- (10) Pullin, D. I. & Lundgren, T. S., Axial motion and scalar transport in stretched spiral vortices., *Phys. Fluids*,**13**(2001),2553-2563.
- (11) Yoshizawa, A. , Nonequilibrium effect of the turbulent – energy -production process on the inertial-range energy spectrum. *Phys. Rev. E***49**(1994),4065-4071.

- (12) Woodruff, S.L. & Rubinstein, R. 2006 Multiple-scale perturbation analysis of slowly evolving turbulence. *J. Fluid Mech.* **565**, 95–103.
- (13) Domaradzki, J.A. & Rogallo, R.S., Local energy transfer and nonlocal interactions in homogeneous, isotropic turbulence, *Phys. Fluids, A* **2**(1990),413-426.