

[共同研究成果]

円管流・層流乱流遷移モデル(3) : レイノルズの色素流入実験とヒステリシス曲線

神田 英貞
会津大学コンピュータ理工学部

1 はじめに: レイノルズの問題

本研究は、東北大学情報シナジーセンター、SENAC Vol. 38 No. 4、SENAC Vol. 40 No. 1 [共同研究成果: 円管流・層流乱流遷移モデル] の続きである。

Osborne Reynolds (レイノルズ) は 1883 年に円管流の 2 つの層流乱流遷移臨界値 (R_c) を発見した [12]: (1) 層流から乱流への臨界値 $R_{c1} = 12830$ (色素流入実験) と (2) 乱流から層流への臨界値 $R_{c2} = 2030$ (圧力差実験)。 $R_{c2} = 2030$ は最小臨界値 $R_c(\min)$ とよばれ、理論的説明は未だなされていない [2]。

我々はレイノルズの層流乱流遷移問題を長年に渡って研究し遷移モデルを作成した。そして、円管流と平行平板間流 (チャンネル流) の実験値に近い最小臨界値を陽解法で計算することができた [5, 7]。2003 年から検証実験をおこなっているが、モデルの正しさを裏付けている。ただし、世界最初のため、本遷移モデルは現段階では仮説である。本モデルはマクロモデルであり、物理構造を解析するマイクロモデルの作成と外部研究者の判定は将来の課題である。

本研究では、実験結果と陰解法に修正した計算スキームの結果について述べる [15]。全体像を 4 ステップに分ける。

- (1) レイノルズの色素流入実験を再現し問題を定義、検証する。
- (2) 定義された問題にたいする、新しい変数を数値計算から発見する。それは壁面法線方向力 NWS (Normal wall strength) である。
- (3) NWS の効果から最小臨界値 $R_c(\min)$ を計算する。
- (4) 他の臨界値 R_c の計算、例えばベルマウス付の実験値に応用し、遷移モデルの正しさを検証する (将来課題)。

2 レイノルズの実験の検証

円管流の軸方向の速度分布は入口で均一であるが、後流では壁面近くの粘性により放物形に発達することはよく知られている (図 1 参照)。入口から 99% 成長した放物形になるまでの距離を助走距離 Le 、入口から助走距離までの区間を助走区間とよんでいる。 Le から後流の放物形速度分布の区間を成長区間という。レイノルズ数 (Re) ≥ 500 の範囲では、 Le は次式で与えられる [1]。

$$Le = \frac{x'}{DRe} \approx 0.056$$

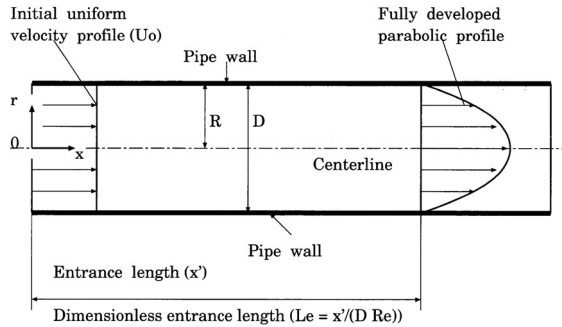


図 1 助走区間における速度成長

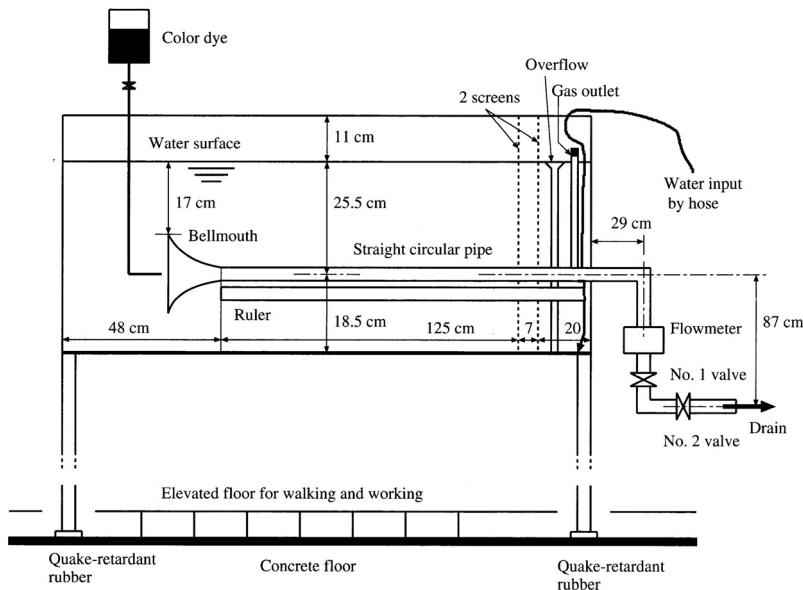
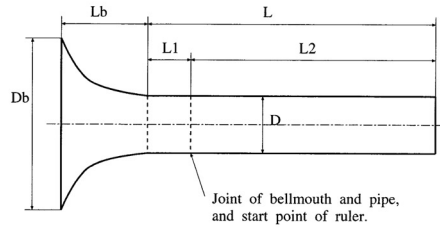


図 2 色素流入実験装置

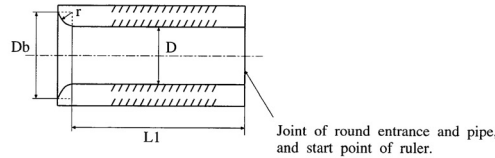
ここで、 x' は管軸方向の実際の距離、 D は円管直径、 $Re = u_0 D / \nu$ 、 u_0 は平均流速、 ν は動粘度である。レイノルズの色素流入実験の場合、 $D = 2.6$ cm、 $Re = 12830$ であるから、 $Le \approx 1870$ cm となる。 $R_c(\text{min}) = 2030$ の場合は、 $Le \approx 300$ cm である。レイノルズの実験装置の横幅は 180cm であるから、円管の長さはこれより 20-30cm 短いはずで、いずれの場合も、乱流は助走区間内で発生することは明白である。

レイノルズの色素流入類似実験 (図 2) を 2003 年 3 月以降、2005 年 8 月までに約 1200 回実施した [6]。簡単にみえる実験も実験方法を定めるのが困難で、さらに 2008 年 1 月まで継続し、実験回数は 2300 回をこえた [8]。実験方法の概略を述べる。

(1) R_c は、層流から乱流に遷移する R_{c1} と乱流から層流に遷移する R_{c2} の 2 種類に分類して整理する。助走区間、成長区間とあわせて、遷移は 4 つのタイプに分類される。本色素流入実験では、助走区間での R_{c1} と R_{c2} が測定可能である。



(a) Bellmouth entrance (Be1–Be4)



(b) Quadrant-arc round entrance (Qa1–Qa5)

Entrance	D_b	r	L_b	C_b	C_r	$L1$	L
St	2.6	0.0	-	1	0.0	8	158
Qa1	2.8	0.1	0.1	1.08	0.039	5.9	155.9
Qa2	3.0	0.2	0.2	1.15	0.077	5.8	155.8
Qa3	3.2	0.3	0.3	1.23	0.115	5.7	155.7
Qa4	3.4	0.4	0.4	1.31	0.154	5.6	155.7
Qa5	3.6	0.5	0.5	1.39	0.193	5.5	155.7
Be1	4.0	-	1.05	1.54	-	5	156
Be2	6.07	-	2.6	2.34	-	4	154
Be3	10.4	-	5.85	4	-	4	154
Be4	15.6	-	9.75	6	-	4	154

図 3 入口形状 (単位: cm, $D = 2.6$, $L2 = 150$)

(2) 入口にラッパ状のベルマウスを取付け、ベルマウスの直径 (BD) と管直径 (D) の圧縮比 ($C_b = BD/D$) の R_c における関係を調べる。4 種類のベルマウス形状は ASME 標準の外径:内径 = 3:2 の楕円形である。さらに、小さな圧縮比を作った。円管内径 26 mm、外径 40 mm、管の厚さ 7 mm なので、管先端の内側を半径、1 mm, 2 mm, ..., 5 mm の 4 分の 1 円に丸く削る (5 種類、Qa1–Qa5, 図 3 参照)。レイノルズの色素流入実験では $C_b = 6$ 位である。

(3) R_c は水槽に水を入れた後、実験開始までの待ち時間に影響される。待ち時間が 1 時間をこえると、その影響は少ない。

(4) 水槽内の水は円管をとおして、外部に排出される。水槽内の乱れを少なくするため、測定中は水槽内への水の注入は行わない。従って、水位が下がるが、測定水位は 0 cm (水面最上位) から 15 cm 位低下するまで可能である (図 2 参照)。この無注水法はレイノルズと同一である。

表 1 入口形状と R_{c1} と R_{c2} 実験値

Entrance	C_b	C_r	R_{c1}			R_{c2}		
			Exper.	Eq. (2)	Error [%]	Exper.	Eq. (3)	Error [%]
St	1	0	2200	2370	7.7	2050	2060	0.5
Qa1	1.08	0.039	3600	3390	-5.8	3150	3170	0.6
Qa2	1.15	0.077	5000	4850	-3.0	4100	4000	-2.4
Qa3	1.23	0.115	6700	6750	0.7	4650	4600	-1.0
Qa4	1.31	0.154	8750	9170	4.8	4850	4980	2.7
Qa5	1.39	0.192	12200	11980	-1.8	5200	5100	-1.9
Be1	1.54	...	12500	5200
Be2	2.34	...	12200	5450
Be3	4	...	12500	5500
Be4	6	...	12200	5500

(5) 測定可能な Re は最大 23000 位である。ベルマウスを取り付けて実験した場合、最大 Re であっても、水位が約 5-10 cm 下がるまで乱流は発生しなかった (初期層流状態)。人工攪乱を用いず自然な静かな環境下でも、層流から乱流への遷移には微少攪乱が必要である。

(6) R_{c1} の実験は、待ち時間 3 時間以上、水位 10-14 cm の範囲で測定した。

(7) R_{c2} の実験は、待ち時間 20 分。開始直後はバルブを全開し乱流の発生を待ち、乱流をさらに水位 5cm 位下がるまで維持する。その後、バルブを目標 R_c まで急速にしぼる (平均 1 分)。乱流状態が残るか、層流化が始まるかどうかを観測する。

実験結果は表 1、図 4 である。

(1) 遷移は助走区間、特に入口近くで発生することを確認した [4, 16]。

(2) 図 4 は R_{c1} と R_{c2} を圧縮比 C_b にたいして図示したものである。例えば、 $C_b = 6$ で、攪乱の大きさを待ち時間を短くするか、水槽内への注水により大きくすると、 $R_{c2} \leq R_c \leq R_{c1}$ となり、 R_{c1} と R_{c2} は接続可能で、図 4 のようなヒステリシス曲線を得た。実験条件を変えた場合の R_c はこのヒステリシス曲線内にある。

(3) R_c は直円管 (St) のとき最小値 $R_c(\min)$ となる。

$$R_c(\min) = \lim_{C_b \rightarrow 1} R_{c2} = R_{c2}(\text{St}) = 2050 \quad (1)$$

(4) R_{c1} は、 $C_b = 1$ (St) から $C_b = 1.08$ (Qa1)-1.39 (Qa5) と滑らかに増大し、 $R_{c1} = 12200-12500$ の値になる。この値は、ベルマウスを付けて C_b を大きくしてもほぼ一定である。同様に、 R_{c2} は、 $C_b = 1-2.34$ (Be2) と増大し、 $R_{c2} = 5450-5500$ となる。ただし、 $C_b = 1.39$ (Qa5) のとき $R_{c2} = 5200$ であり、 R_{c1} と R_{c2} は 4 分の 1 円

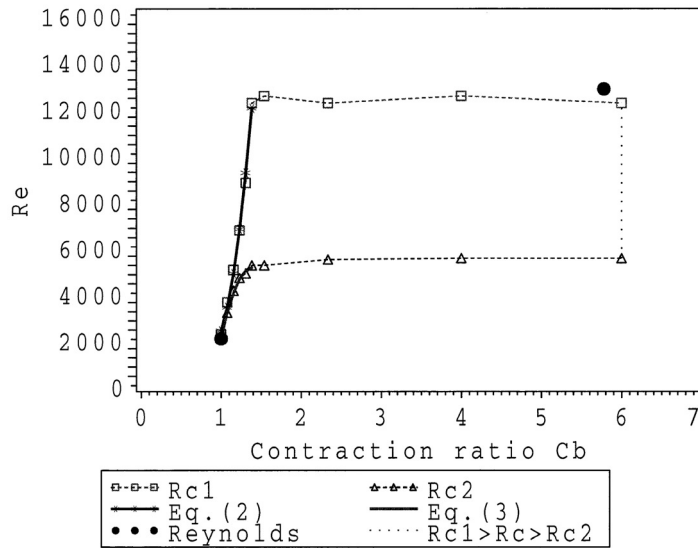


図 4 R_{c1} と R_{c2} の圧縮比にたいするヒステリシス曲線

(Qa1-Qa5) の入口形状 ($r = 1-5$ mm) によって殆んど決定されることに注意が必要である。

(5) 別の圧縮比 $C_r (= r/D)$ を考え、 C_r と実験値 R_{c1} , R_{c2} の関係を最小 2 乗法により求めると、

$$R_{c1}(C_r) \approx 2370 [65.7 (C_r)^2 + 8.5 (C_r) + 1], \quad 0 \leq C_r \leq 0.192 \quad (2)$$

$$R_{c2}(C_r) \approx 2060 [-39.6 (C_r)^2 + 15.3 (C_r) + 1], \quad 0 \leq C_r \leq 0.192 \quad (3)$$

式 (2), (3) を図 4 に図示したが、実験値とよく一致している。

(6) (i) $Re = 2000$ 近傍の R_{c1} と R_{c2} の曲線の滑らかさと、(ii) 入口から $6D-13D$ の距離まで層流が続くため、直円管は遷移の特異点ではない。遷移距離 (L_t) は入口から遷移発生までの距離として定義する。

- 直円管の流れは $R_c(\min)$ を引き起す本質的な条件である。

(7) R_c は管入口の小さな圧縮比で決定され、また遷移距離の存在から、

- 入口近傍には我々がこれまで考慮しなかった何かの力が作用している。

3 Rc を決定する変数: 壁面法線方向力 (NWS)

管入口近傍で作用している力を考える。したがって、圧力計算には境界層近似を用いない。

計算ステップは

- (i) 渦度輸送方程式と渦度の Poisson (ポアソン) 方程式から速度場を求める。
- (ii) Navier-Stokes (N-S) 方程式と圧力のポアソンの式から圧力分布を求める。
- (iii) 圧力分布から、Re の変化に応じて変化する新しい変数を考える。

3.1 支配方程式

まず、渦度輸送方程式 (4) と渦度のポアソン方程式 (5) から流れ関数 ψ と渦度 ω を得て、その値から速度 (6) を求める。時間に関し定常状態になるまでこれらの計算を繰り返す。次いで、定常状態の N-S 方程式 (9) から圧力の初期値を計算し、圧力のポアソン方程式 (11) から滑らかな解を得る。

渦度輸送方程式：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right\}. \quad (4)$$

渦度のポアソン方程式は渦度の定義から

$$-\omega = \nabla^2 \psi = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (5)$$

軸方向速度 u と半径方向速度 v は流れ関数の定義から

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

2次元流れでは、一方向の渦度 ω_θ だけが有効であり、ここでは ω と省略する。

$$\omega = \omega_\theta = [\nabla \times V]_\theta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (7)$$

壁面での渦度は $\partial v / \partial x = 0$ から

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial r}. \quad (8)$$

定常状態の N-S 方程式から圧力勾配を求めると、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right). \quad (10)$$

式 (9) と (10) を同時に満足する圧力はポアソン方程式から求める [13]。

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = -2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{v^2}{r^2} \right]. \quad (11)$$

式 (4) の陰解法表現は (12) となる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^n}{\partial r} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} + \frac{\omega^{n+1}}{r^2} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \omega^{n+1})}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \omega^{n+1}}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

初期条件を定める。流れ関数は初期速度は管内で均一であるから、式 (6) から求める。

$$\psi(i, j) = \frac{1}{2} [(j-1)\Delta r]^2, \quad 1 \leq i \leq I0, \quad 1 \leq j \leq J0.$$

初期渦度は (5) から求め、速度は $u = 1, v = 0$ とする。

境界条件を定める。

- (i) 中心線上: $\psi_{i,1} = 0, \omega_{i,1} = 0, \quad 1 \leq i \leq I1.$
- (ii) 入口: $\psi_{1,j} = 0.5[(j-1)\Delta r]^2, \omega_{1,j} = 0, \quad 2 \leq j \leq J1.$
- (iii) 壁面上: $\psi_{i,J0} = 0.5[(J0-1)\Delta r]^2, \quad 1 \leq i \leq I1.$
- (iv) “すべり” のない壁面上での渦度は式 (8) から求める。2次精度を維持するため、1方向3点法 (Three-point, one-sided approximation) を用いる。

$$\omega_{i,J0} \approx -\frac{3u_{i,J0} - 4u_{i,J1} + u_{i,J2}}{2\Delta r} = \frac{4u_{i,J1} - u_{i,J2}}{2\Delta r}. \quad (13)$$

(v) 出口 (線形外挿法):

$$\psi_{I0,j} = 2\psi_{I1,j} - \psi_{I2,j}, \quad \omega_{I0,j} = 2\omega_{I1,j} - \omega_{I2,j}, \quad 1 \leq j \leq J0.$$

圧力計算における境界条件は

(vi) 中心線上 (1方向3点法): 壁面では $\partial p / \partial r = 0$ から、

$$p_{i,1} = \frac{4p_{i,2} - p_{i,3}}{3}, \quad 1 \leq i \leq I0.$$

(vii) 入口 (管壁を除く): $p_{1,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J1.$

(viii) 入口 (管壁):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{i=1, j=J0} \approx \frac{3p_{1,J0} - 4p_{1,J1} + p_{1,J2}}{2\Delta r} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{-\omega_{3,J0} + 4\omega_{2,J0} - 3\omega_{1,J0}}{2\Delta x} \right).$$

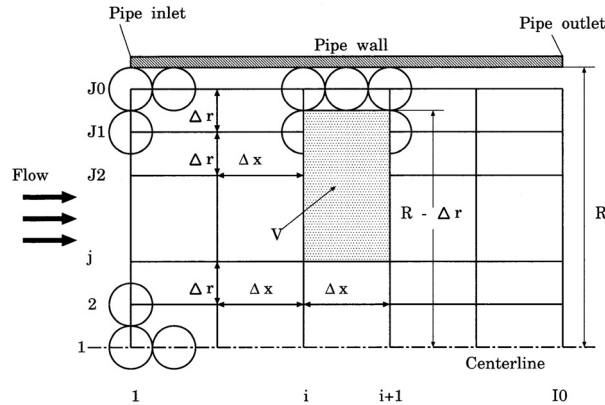


図 5 円管内の直交格子システム

(ix) 壁面上：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{i \geq 2, j = J0} \approx \frac{3p_{i,J0} - 4p_{i,J1} + p_{i,J2}}{2\Delta r} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\omega_{i+1,J0} - \omega_{i-1,J0}}{2\Delta x} \right).$$

(x) 流出出口： $p_{I0,j} = 2p_{I1,j} - p_{I2,j}$, $1 \leq j \leq J0$.

数値計算では時間に関して前進、空間に関して中心差分近似法の FTCS(Forward-Time, Centered-Space) と Gauss-Seidel 反復法で差分式を解く。計算フローチャートは陰解法(付録図 A.1)、陽解法(付録図 A.2)である。本研究では陰解法を用いる [15]。格子は図 5 のように直交格子である。格子、タイムステップ Δt 、収束までのタイムステップ数、CPU 時間は付録の表 A.1 に示す。使用計算機は東北大学情報シナジーセンターの NEC SX-7 (8.83G-FLOPS/ processor) を用いた。

3.2 計算結果

管壁の圧力を p_w 、中心線の圧力を p_c とする。管入口の圧力を 0 とするため、圧損は正、圧力は負である(絶対値は同一): $\Delta p_c = -p_c$, $\Delta p_w = -p_w$ 。図 6-9 は (a) 流れる軸方向の圧力損失 Δp_c と Δp_w 、さらに (b) 半径方向の圧力 p の計算結果を示す。

実際の流れ方向の管軸座標を x' とし、計算には無次元軸方向座標 x と Δx 、結果の表示用には X を用いる: $\Delta x = \Delta X \times \text{Re}$ 。

$$x = \frac{x'}{D}, \quad X = \frac{x'}{D\text{Re}}$$

結果として、

(1) 図 (a) の実線は実験値を示し [14]、管壁と中心線の圧力の中であり、計算結果の妥当性を示している。

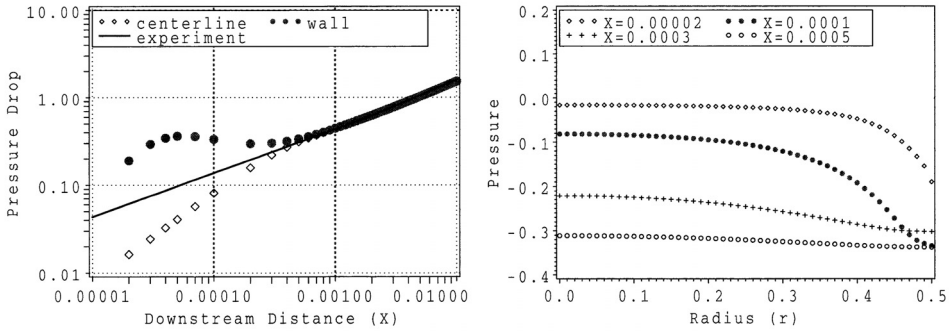


図 6 (a) 軸方向圧力分布 と (b) 半径方向圧力分布, $Re = 1000$.

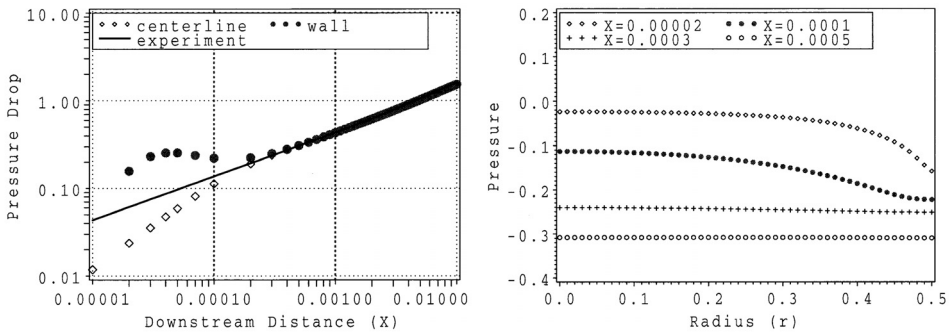


図 7 (a) 軸方向圧力分布 と (b) 半径方向圧力分布, $Re = 2000$.

(2) 図 6 ($Re = 1000$) から、管を半径方向断面で切れば、大きな $(p_c - p_w)$ が管入口近くの $X \leq 0.0005$ の範囲で存在する。この後の後流では小さくなり、成長区間では存在しない。

(3) $(p_c - p_w)$ は Re が大きくなるにつれて小となる。図 9 ($Re = 10000$) では、 $(p_c - p_w)$ は小さく、 $X \leq 0.00005$ の範囲でのみ存在している。

(4) $\Delta p_w \geq \Delta p_c$. または、 $p_c \geq p_w$. これは、管を半径方向断面で切れば、壁面の圧力は中心線の圧力よりも低いことを示している (図 6-9(b) 参照)。つまり、境界層近似は成立せず、ベルヌーイの定理にも反している。

3.3 壁面法線方向力 NWS

半径方向の圧力の勾配を考える。N-S 方程式のベクトル形式は次式で表わされる [3].

$$\frac{\partial V}{\partial t} - V \times \omega = -\frac{1}{2} \text{grad} (p + V^2) - \frac{1}{Re} \nabla \times \omega. \quad (14)$$

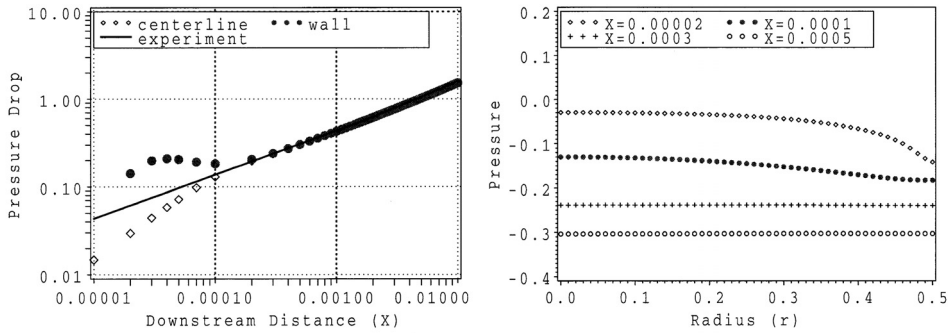


図 8 (a) 軸方向圧力分布 と (b) 半径方向圧力分布, Re = 3000.

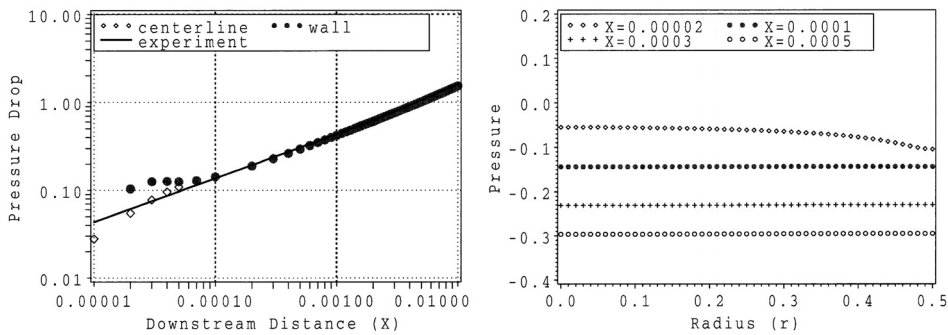


図 9 (a) 軸方向圧力分布 と (b) 半径方向圧力分布, Re = 10000.

壁面境界においては、速度は $V = 0$ であるから、

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{2}{\text{Re}} \nabla \times \omega \Big|_{r=R} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \Big|_{r=R} \quad (15)$$

ここで、法線方向圧力勾配は、負の渦度の回転の法線成分で与えられる。壁面での渦度の回転の法線成分を NWS (Normal wall strength) とよび、次式で定義する。

$$\text{NWS} \equiv \frac{2}{\text{Re}} \nabla \times \omega \Big|_{r=R} = -\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (16)$$

NWS の特性を図 6-10 から考える。

(i) NWS は渦度の回転の法線方向成分である (式 (16) 参照)。壁面での圧力勾配 $\partial p / \partial r$ は NWS により発生する (式 (15) 参照)。

(ii) 壁面での圧力勾配 $\partial p / \partial r$ と NWS の大きさは等しく、方向は反対である。NWS の方向は壁面から中心線に向って、つまり法線方向に働く (図 10 参照)。

(iii) NWS は円管入口で大きく、成長区間では消滅する。これは軸方向の渦度の回転が入口では大きく、成長区間では 0 のためである。

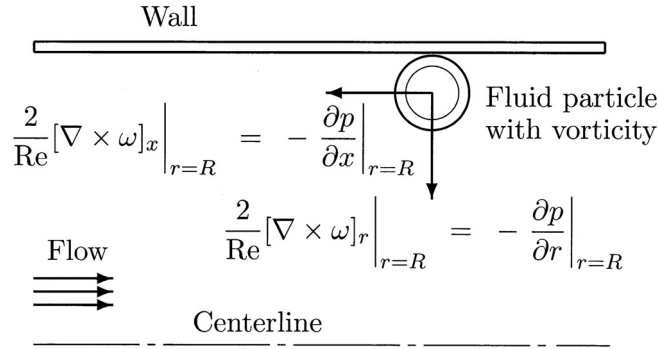


図 10 壁面上での渦度の回転の方向

(iv) Re が大となると、NWS は小となる。

(v) 境界層理論は $\partial p/\partial r = 0$ を仮定し、NWS を無視している。

(vi) 他方、壁面での渦度の回転の負の軸方向成分を、接線方向渦度発生力 (Tangential-vorticity source strength) とよぶ [10]。この力は渦度を壁面から中心部へ伝搬する。

$$-\frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \right] = \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] = \frac{2}{\text{Re}} \nabla^2 u = -\frac{2}{\text{Re}} [\nabla \times \omega]_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

3.4 半径方向圧力勾配の理論的考察

理論的に、半径方向断面において壁面と中心線上での圧力の大小を考える。壁面では、 $u_{i,J0} = 0$ であるから

$$u_{i,J1} \approx \frac{(u_{i,J0} + u_{i,J2})}{2} = \frac{1}{2} u_{i,J2}. \quad (17)$$

壁面渦度は式 (8), (13), (17) から

$$\omega_{i,J0} = -\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} \approx \frac{u_{i,J1}}{\Delta r} > 0. \quad (18)$$

式 (18) を (15) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \Big|_{r=R} \approx \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{i,J1}}{\Delta r} \right) \\ &\approx \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{u_{i+1,J1} - u_{i-1,J1}}{2\Delta x \Delta r} \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

助走区間では $u_{i+1,J1} < u_{i-1,J1}$ である。式 (19) から壁面での圧力勾配は負となる。

他方、成長区間では $u_{i+1,J1} = u_{i-1,J1}$ であるから、半径方向圧力勾配は 0 である。成長区間での速度分布は式 (20) で与えられる。

$$u(r) = 2u_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (20)$$

無次元化すると平均速度は $u_0 = 1$, 半径は $R = 0.5$ である。式 (20) を微分すると一定の壁面過度 $\omega = 8$ を得る。

$$\omega|_{r=R} = - \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = -2 \left(-\frac{2R}{R^2} \right) = 4 \frac{1}{R} = 8$$

4 臨界値 $R_c(\text{min})$ の決定

(1) Re が大きくなると乱流が発生する。 Re が層流乱流遷移の第一要因である。

(2) 実験結果から、第二要因は入口形状である。直円管のとき、 R_c は $R_c(\text{min})$ となる。

(3) 臨界値 R_c を決定するパラメータ (a) とパラメータ (b) を考える。 X 座標系において、パラメータ (a) は Re に関係無く一定値をとり、パラメータ (b) は Re が大きくなると減少する。そのように選べば、パラメータ (a), (b) の2つの線は図 13 のように交わり、交点は R_c を示す。

4.1 運動エネルギーの増加 KE

X 座標系では速度分布の成長と助走距離 Le 、流れ方向の圧力損失は Re が 500 以上のとき、 Re に関係無く一定である [1]。したがって、速度成長による運動エネルギーの増加 KE をパラメータ (a) とする。

入口での均一速度を u_0 , 半径を $R(D = 2R)$ 、半径方向座標を r とすると、助走距離 Le での速度分布は式 (20) で与えられる。したがって、入口と Le の運動エネルギーの差は

$$\int_0^R 2\pi r dr \cdot u(r) \cdot \left[\frac{1}{2} \rho u(r)^2 \right] - \int_0^R 2\pi r dr \cdot u_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u_0^2 \right) = \frac{1}{8} \pi \rho D^2 u_0^3 \quad (21)$$

KE の物理上の単位は、流量を対象にしているから、実際はエネルギーでなく、仕事率、または、パワーである。

$$\left[\frac{kg}{m^3} m^2 \left(\frac{m}{s} \right)^3 = kg \frac{m^2}{s^3} = kg \frac{m}{s^2} \frac{m}{s} \right].$$

加速に必要な無次元化運動エネルギーは次式から $KE = 0.785$ となる。

$$KE = \frac{\frac{1}{8} \pi \rho D^2 u_0^3}{\frac{1}{2} \rho D^2 u_0^3} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \quad (22)$$

この値は Re に関係のない一定値である。 Re が大きくなると遷移は発生するから、 Re により変化する変数を探ることが重要である。

4.2 NWS の R_c に及ぼす効果: RW

半径方向圧力差を熱力学の面から定量化する。エンタルピーを H 、熱量 Q 、温度 T 、内部エネルギー U 、体積を V 、仕事 W とする。熱力学の法則から

$$dU = dQ + dW = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

上式から、温度変化のない体積一定の流体の場合、内部エネルギーの変化は 0 である。したがって、エンタルピーの変化を次式で表す [9]。

$$dH = dU + d(pV) = d(pV) = pdV + Vdp = Vdp$$

Vdp が NWS のする仕事 WK である。

$$WK = dH = Vdp \quad (23)$$

式 (23) の単位は次のように仕事である。

$$\left[m^3 \cdot kg \frac{m}{s^2} \frac{1}{m^2} = kg \frac{m^2}{s^2} = kg \frac{m}{s^2} \cdot m \right].$$

KE の単位は仕事を時間で割ったパワーである。WK を作用する時間 Δt で割ればパワー RW となる。

$$RW = \frac{WK}{\Delta t} = \frac{V\Delta p}{\Delta t} \quad (24)$$

WK と RW を次の手順で求める。

(1) 式 (24) の体積 V を求める。図 5 において、 $x(i)$ と $x(i+1)$ の間の斜線部分を対象とする。図 6-9(b) から、中心に近いところでは圧力は等しいので、NWS 効果は $r(j)$ のところまで有効とする。したがって、体積は

$$V(i, j) = \pi \left\{ (R - \Delta r)^2 - [(j-1)\Delta r]^2 \right\} \Delta x. \quad (25)$$

次に、半径方向圧力差を求める。

$$\begin{aligned} \Delta p(i, j) &= p(i, j) - p_w(i) = \frac{1}{2} (p_{i,j} + p_{i+1,j}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (p_{i,J0} + p_{i,J1} + p_{i+1,J0} + p_{i+1,J1}) \end{aligned} \quad (26)$$

(2) NWS が格子点 $(i, J0)$ と $(i+1, J0)$ 間の渦度に作用する時間を考える。距離は $\Delta x (= x(i+1) - x(i))$ である。2点 $(i, J1)$ 、 $(i+1, J1)$ の速度は各々 $u_{i,J1}$ と $u_{i+1,J1}$ である。したがって、仮の時間 $t^*(i)$ を上で述べた距離を速度で割り求める。

$$\Delta t^*(i) \equiv \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(u_{i,J1} + u_{i+1,J1})} \approx \frac{\Delta x}{u_{i+1/2,J1}}$$

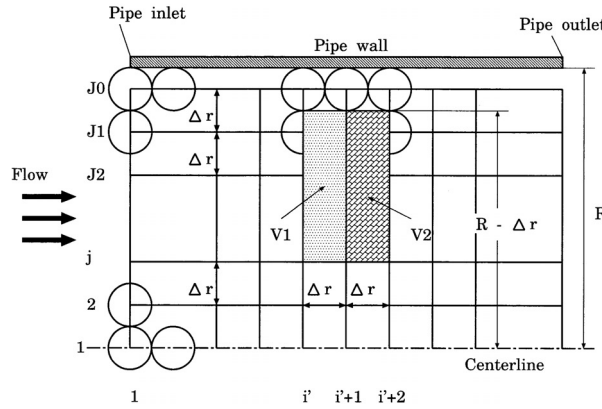


図 11 格子システム, $\Delta x = \Delta r$.

しかし、この仮の時間を使用すると矛盾が生じる。簡単な例として、(a) $\Delta x = 2\Delta r$ と (b) $\Delta x = \Delta r$ における矛盾を取り上げる。最初に、図 5 の格子比を 2 ((a) $\Delta x = 2\Delta r$) として考える。 $x(i)$ と $x(i+1)$ 間の仕事 WK(a) とパワー RW(a) は、

$$WK(a) = V\Delta p, \quad (27)$$

$$RW(a) = \frac{V\Delta p}{\Delta x} = \frac{(V\Delta p) u_{i+1/2,J1}}{2\Delta r}. \quad (28)$$

次いで、図 11 のように格子比を 1 ((b) $\Delta x = \Delta r$) とする: $V1 + V2 = V$ 。 V の仕事 WK(b) とパワー RW(b) は $V1$ と $V2$ の合計である。

$$WK(b) = V1\Delta p1 + V2\Delta p2 \approx V\Delta p, \quad (29)$$

ここでは、 $\Delta p1 \approx \Delta p2 \approx \Delta p$ とする。

$$RW(b) = \frac{V1\Delta p1}{u_{i'+1/2,J1}} + \frac{V2\Delta p2}{u_{i'+3/2,J1}} \approx \frac{(V\Delta p) u_{i'+1,J1}}{\Delta r} \approx 2RW(a), \quad (30)$$

ここでは、 $u_{i'+1/2,J1} \approx u_{i'+1,J1} \approx u_{i'+3/2,J1}$ とする。式 (27) と (29) から、WK(a) と WK(b) は等しい。しかし、式 (28) と (30) を比較すると、RW(b) は RW(a) の 2 倍である。したがって、時間 $\Delta t(i)$ を次のように定めて、この矛盾を解決する。一般的な $\Delta x = n\Delta r$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の格子比の計算空間において、

$$\Delta t(i) \equiv \frac{\Delta r}{\frac{1}{2}(u_{i,J1} + u_{i+1,J1})} \approx \frac{1}{\frac{1}{2}(\omega_{i,J0} + \omega_{i+1,J0})}, \quad (31)$$

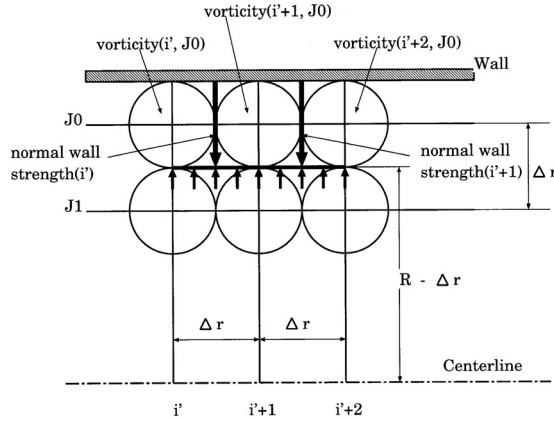


図 12 NWS と壁面上圧力のバランス状態

ここでは、式 (18) から $\omega_{i,J0} = u_{i,J1}/\Delta r$ である。

この時間は次の仮定に基づいている。

(i) 壁面上は”すべり”のない境界条件である。つまり、流体粒子は移動しないが、回転している [11]。

(ii) 壁面上での流体粒子の回転は渦と渦度を生じている。渦の直径は Δr である。従って、NWS は渦毎に発生する。図 12 は NWS と圧力との $j = 0.5(J0 + J1)$ における平衡状態を示している。

この関係を簡単に差分形で考察する。 $\Delta x = n\Delta r$ として、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta r} &= \frac{2}{\text{Re}} \frac{\Delta \omega}{\Delta x} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\Delta x} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\omega_{i'+n} - \omega_{i'}}{n\Delta r} \\ &= \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{n\Delta r} \left[(\omega_{i'+n} - \omega_{i'+n-1}) + (\omega_{i'+n-1} - \omega_{i'+n-2}) + \dots + (\omega_{i'+1} - \omega_{i'}) \right] \\ &\approx \frac{2}{\text{Re}} \frac{n(\omega_{i'+1} - \omega_{i'})}{n\Delta r} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\omega_{i'+1} - \omega_{i'}}{\Delta r}, \end{aligned}$$

ここでは、小区間 $x(i)-x(i+1)$ において $\omega_{i'+n} - \omega_{i'+n-1} \approx \omega_{i'+n-1} - \omega_{i'+n-2} \approx \dots \approx \omega_{i'+1} - \omega_{i'}$ と仮定する。以上から、NWS と $\partial p/\partial r$ の関係は Δr を単位とすることが証明された。

(3) 体積 $V(i, j)$ にたいするパワー $\text{RW}(i)$ は式 (25), (26), (31) から計算され、全体のパワーは次式で求められる。

$$\text{RW} = \sum_i \frac{V(i, j) \Delta p(i, j)}{\Delta t(i)} \quad (32)$$

表 2 パワー (RW) と判断基準、Re = 2000, J0 = 51.

No	c1 ($p_c - p_w$)	c2 ($p_w - p_c$)/ p_c	c3 ($p(j) - p_w$)/($p_c - p_w$)	c4 ω	$X(i)$	$r(i, j)$	RW
1	0.01	-	1.00	-	0.00029	0.00	1.278
2	0.01	-	0.95	-	0.00029	0.09	1.067
3	0.01	-	0.90	-	0.00029	0.13	0.898
4	0.05	-	1.00	-	0.00016	0.00	1.085
5	0.05	-	0.95	-	0.00016	0.10	0.895
6	0.05	-	0.90	-	0.00016	0.14	0.744
7	-	0.01	1.00	-	0.00041	0.06	1.302
8	-	0.01	0.95	-	0.00041	0.16	1.089
9	-	0.01	0.90	-	0.00041	0.20	0.917
10	-	0.03	1.00	-	0.00032	0.00	1.287
11	-	0.03	0.95	-	0.00032	0.10	1.076
12	-	0.03	0.90	-	0.00032	0.13	0.906
13	-	0.05	1.00	-	0.00028	0.00	1.274
14	-	0.05	0.95	-	0.00028	0.09	1.064
15	-	0.05	0.90	-	0.00028	0.13	0.894
16	-	0.03	-	10^{-7}	0.00032	0.28	0.194

4.3 NWS の作用する有効範囲

パワー RW を式 (32) から求めるため、NWS の作用する有効範囲 $\Delta p(i, j)$ を決める。判断基準 c1-c4 を考える。半径方向の圧力は $0 \geq p_c(i) \geq p(i, j) \geq p_w(i)$ の関係にある。

軸方向: (i) $c1 = (p_c - p_w)$, (ii) $c2 = (p_w - p_c)/p_c$

半径方向: (iii) $c3 = (p(i, j) - p_w)/(p_c - p_w)$, (iv) $c4 = \omega$

パワー RW (Re = 2000) の判断基準と計算結果を、格子 $J0 = 51, 101$ にたいして表 2 と 3 に示す。

(1) NWS の軸方向有効距離を考える。ケース 4 No. 4 ($c1 = 0.05$) と 13 ($c2 = 0.05$) の有効距離は 0.00016 と 0.00028 である。図 7 で、 $X = 0.0002$ において小さな $(p_c - p_w)$ をみることができるから $c2$ のほうが $c1$ より判断基準として適している。 $X = 0.0002$ において、 $p_c = -0.192$ 、 $p_w = -0.225$ 、 $c1 = (p_c - p_w) = 0.033$ 、 $c2 = (p_w - p_c)/p_c = 0.147$ である。 $X = 0.0003$ において、微細な $(p_c - p_w)$ をみることができ、 $p_c = -0.241$ 、 $p_w = -0.251$ 、 $c1 = 0.01$ 、 $c2 = 0.040$ である。 $X = 0.0004$ においては、 $(p_c - p_w)$ をみることはできず、 $p_c = -0.277$ 、 $p_w = -0.281$ 、 $c1 = 0.004$ 、 $c2 = 0.014$ である。以上から、 $c2$ の基準値を 0.030 とする。

表 3 Power (RW) と判断基準、Re = 2000, $J_0 = 101$.

No	c1 ($p_c - p_w$)	c2 ($p_w - p_c$)/ p_c	c3 ($p(j) - p_w$)/($p_c - p_w(i)$)	c4 ω	$X(i)$	$r(i, j)$	RW
17	0.01	-	1.00	-	0.00024	0.04	1.029
18	0.01	-	0.95	-	0.00024	0.13	0.814
19	0.01	-	0.90	-	0.00024	0.17	0.674
20	0.05	-	1.00	-	0.00013	0.00	0.912
21	0.05	-	0.95	-	0.00013	0.12	0.708
22	0.05	-	0.90	-	0.00013	0.17	0.579
23	-	0.01	1.00	-	0.00029	0.30	1.039
24	-	0.01	0.95	-	0.00029	0.31	0.822
25	-	0.01	0.90	-	0.00029	0.32	0.682
26	-	0.03	1.00	-	0.00026	0.08	1.035
27	-	0.03	0.95	-	0.00026	0.17	0.819
28	-	0.03	0.90	-	0.00026	0.21	0.679
29	-	0.05	1.00	-	0.00024	0.02	1.029
30	-	0.05	0.95	-	0.00024	0.13	0.814
31	-	0.05	0.90	-	0.00024	0.17	0.674
32	-	0.03	-	10^{-7}	0.00026	0.33	0.087

(2) 半径方向の有効距離を考える。表 3 のケース No. 23 ($c_3 = 1.00$) では、中心 $r = 0$ から $r = 0.30$ まで圧力は等しく、ケース No. 26 ($c_3 = 1.00$) では中心 から $r = 0.08$ まで圧力は等しい。ケース No. 23 から 25 において、 $r = 0.30$ で $c_3 = 1.00$, $r = 0.31$ で $c_3 = 0.95$, $r = 0.32$ で $c_3 = 0.90$ である。以上から、 c_3 の基準値を 0.95 とする。

(3) 渦度は壁面近傍から中心部へと移動するから、NWS の有効半径方向を渦度で考える。ケース No. 16 の場合、 $\omega = 10^{-7}$ は $J_0 = 51$ の格子で $r = 0.28$, RW = 0.194。ケース No. 32 の場合、 $J_0 = 101$ の格子で $r = 0.33$, RW = 0.087。いずれの値も KW = 0.785 に比べ小である。したがって、 c_4 は判断基準として採用しない。

4.4 最小臨界値 $R_c(\min)$ の計算

最小臨界値 $R_c(\min)$ は Re = 2000 と 3000 の RW を線形補間して求める。

$$\frac{R_c(\min) - 3000}{2000 - 3000} \text{RW} \Big|_{Re=2000} + \frac{R_c(\min) - 2000}{3000 - 2000} \text{RW} \Big|_{Re=3000} = 0.785 \quad (33)$$

計算結果を表 4 と 図 13 に示す。 $J_0 = 51$ の格子にたいして、 $R_c(\min) = 3750$ 、 $J_0 = 101$ の格子にたいして 2200 を得た。

表 4 パワー RW と Re

Re	500	1000	2000	3000	5000	10000
J_0	RW					
51	1.562	1.327	1.076	0.910	0.692	0.420
101	1.500	1.139	0.819	0.656	0.473	0.244

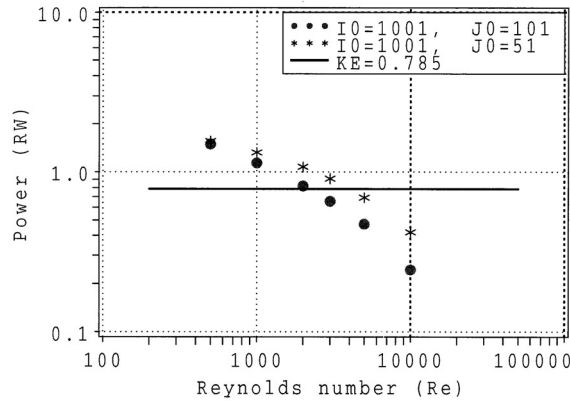


図 13 パワー (RW) と Re

5 結言

過去の数多く行なわれた実験結果と我々の5年間、2300回を超える実験から、層流乱流遷移マクロモデルを考案した。これは仮説であって認知された理論ではないが、事実を基礎とするため普遍モデルとして将来証明されるであろう。

(1) 遷移は入口近くの助走区間で発生する。ただし、円管入口から乱れることはなく、ある遷移距離 L_t ($L_t < L_e$) が必要である。

(2) 遷移は、層流から乱流への遷移 R_{c1} と乱流から層流への遷移 R_{c2} に分ける。同一入口形状の場合、 $R_{c2} \leq R_{c1}$ である。

(3) R_c は入口形状により決定される。各ベルマウスは、最小の $R_{c2}(\text{min,ent})$ をもち、 BD/D の関数である(表2)。 BD/D が最小の1のとき、つまり直円管の場合、 R_c は最小値 $R_c(\text{min}) \approx 2030$ となる。

(4) 始めて、我々は入口近傍で作用する壁面法線方向力 NWS (Normal wall strength) を数値計算から発見した。NWS は Re が大きくなると、小となる。

(5) 層流乱流遷移発生判定条件を次のように仮定する。速度分布は、円管入口で均一、助走距離で放物形になる。この助走区間で、円管内流の運動エネルギーは増加し、増加値は Re に無関係であり一定値 $KE = 0.785$ をとる。加速エネルギーは壁面からの法線方向力 NWS により生じる。NWS による助走区間で加速に使われるパワーを RW とする。 Re が大きくなると、NWS と RW は減少する。

- (i) $RW \geq KE$: 流れは安定
- (ii) $RW < KE$: 流れは不安定

(i) NWS と層流乱流遷移とのミクロな物理構造の研究と (ii) 遷移は何故入口から発生しないで L_t が必要なのかは次の課題である。

謝辞

Utah 大学の Frank Stenger 名誉教授、日本 SGI (株) の下向建秀博士、共同実験をした柳谷貴之氏、東北大学・情報シナジーセンターの皆様には長期間にわたり誠に御世話になりました。

参考文献

- [1] R.-Y. Chen, *Flow in the entrance region at low Reynolds numbers*, J. Fluids Eng., 95 (1973), pp. 153-158.
- [2] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 1981, p. 219.
- [3] S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics. Vol. 1*, Dover, 1965, pp. 97, 297-309.
- [4] R. A. Granger, *Fluid Mechanics*, Dover, 1995, pp. 481-484.
- [5] H. Kanda, *Computerized model of transition in circular pipe flows. Part 2. Calculation of the minimum critical Reynolds number*, ASME FED, 250 (1999), pp. 197-204.
- [6] Kanda, H., and Yanagiya, T., 2005, *Experimental conditions for minimum critical Reynolds number in pipe flow*, Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress & Exposition, Orlando, IMECE2005-80637.
- [7] H. Kanda, *Laminar-turbulent transition: calculation of minimum critical Reynolds number in channel flow*, RIMS Kokyuroku, Bessatsu B1, 2007, pp. 199-217.
- [8] H. Kanda and T. Yanagiya, *Hysteresis curve in reproduction of Reynolds's color-band experiments*, J. Fluids Eng., (2008), to appear.
- [9] D. Kondepudi and I. Prigogine, *Modern Thermodynamics*, John Wiley & Sons, 1998, pp. 40, 55-56.

- [10] M. J. Lighthill, *Laminar Boundary Layers*, L. Rosenhead, ed., Dover, 1988, p. 54.
- [11] R. L. Panton, *Incompressible Flow*, Wiley-Interscience, 1984, p. 323.
- [12] Reynolds, O., 1883, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Trans. Royal Soc. London, **174**, pp. 935–982.
- [13] P. J. Roache, *Fundamentals of computational fluid dynamics*, Hermosa, 1998, pp. 196–200.
- [14] A. H. Shapiro, R. Siegel, and S. J. Kline, *Friction factor in the laminar entry region of a smooth tube*, Proc. 2nd Natl. Congr, Appl. Mech., ASME, pp. 733–741.
- [15] K. Shimomukai and H. Kanda, *Numerical study of normal pressure distribution in entrance pipe flow*, ETNA, Kent State University, (2008), to appear.
- [16] 種子田定俊, 画像から学ぶ流体力学, 朝倉書店, 1993, p. 165.

Appendix

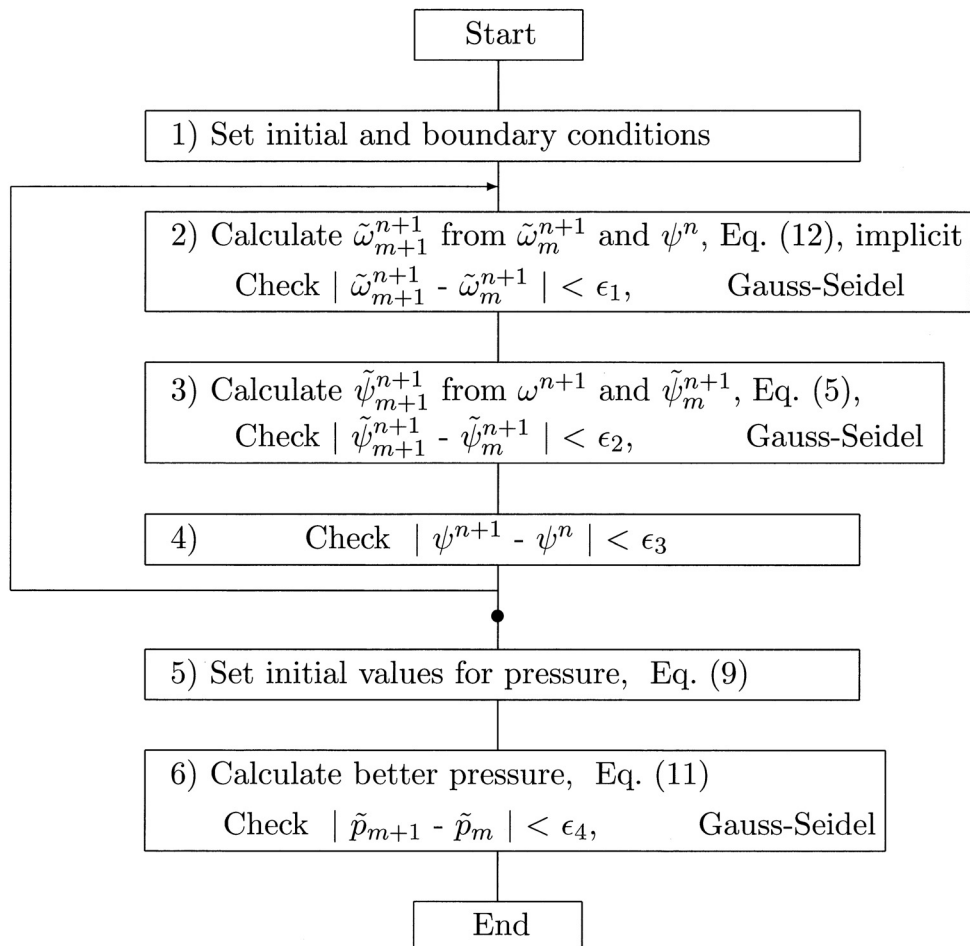


図 A.1 陰解法の計算フローチャート

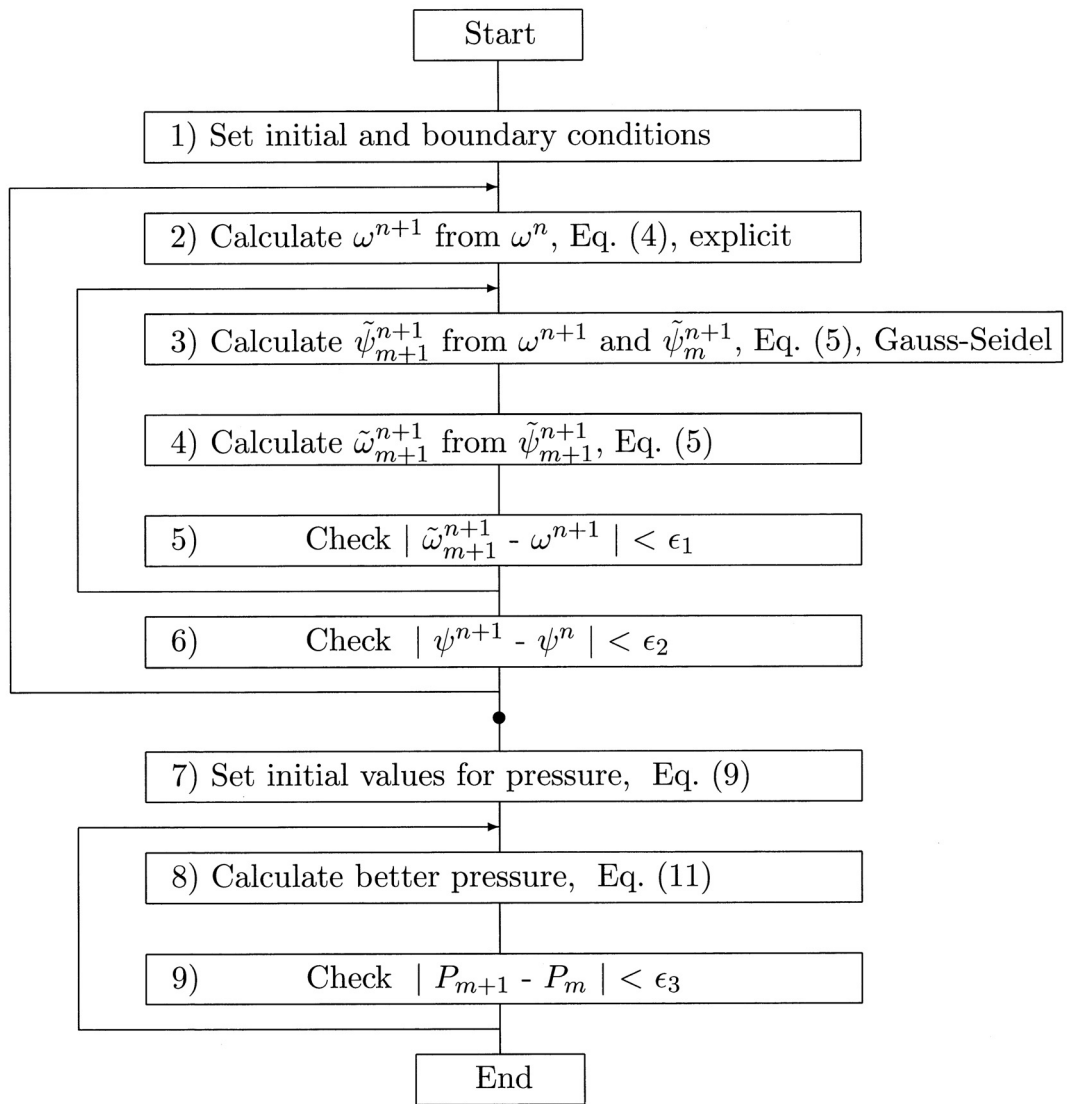


図 A.2 陽解法による計算フローチャート

表 A.1 格子、タイムステップ、定常状態までのタイムステップ数、CPU 時間,
($\Delta X = \Delta x / \text{Re} = 0.00001$)

Re	I0/J0	Δt	T-steps	CPU
500	1000/51	0.0001–0.0005	6,000,000	10h 42m
1000	1000/51	0.0001–0.0002	9,000,000	20h 26m
2000	1000/51	0.0001–0.0002	9,000,000	22h 34m
3000	1000/51	0.0001–0.0002	9,000,000	27h 13m
5000	1000/51	0.0001–0.0005	6,000,000	10h 17m
10000	1000/51	0.0001–0.0005	6,000,000	11h 24m
500	1000/101	0.0001–0.0005	6,000,000	24h 54m
1000	1000/101	0.0001–0.0002	8,000,000	26h 27m
2000	1000/101	0.0001–0.0002	9,000,000	31h 06m
3000	1000/101	0.0001–0.0002	10,000,000	30h 30m
5000	1000/101	0.0001–0.0002	10,000,000	49h 39m
10000	1000/101	0.0001–0.0002	10,000,000	30h 59m