

[共同研究成果]

高度な乱流散逸構造の解像度を有する Vector-Parallel DNS の研究

堀内潔¹, 藤澤竹春¹

¹ 東京工業大学理工学研究科

1 はじめに

乱流の特徴として、大規模スケールから微細スケールへのエネルギーカスケードと、それに伴う最小スケール ($\bar{\eta}$, Kolmogorov scale) でのエネルギー散逸の発生と、管状の構造を持つ渦管および層状の構造を持つ渦層とに大別される渦構造の形成があげられるが、両者には関連性があると考えられる。近年乱流の Navier-Stokes 方程式の直接積分 (direct numerical simulation, DNS) により生成されたデータを用いた研究において、DNS データからの渦層・渦管の抽出から、中心部の渦管とその周囲に存在する二葉の螺旋状の渦層とからなる渦構造 (多重モード spiral vortex) が多く観察されている。この spiral vortex の螺旋状渦層に沿って強いエネルギー散逸が形成されており、この構造が乱流中においてエネルギー散逸の生成を担う機構である可能性がある。そこで本研究は、一様等方乱流の DNS データを用いて多重モード spiral vortex を抽出し、その形成・成長・減衰過程を示し、散逸構造との相関を明らかにすることを目的としている。

2 一様等方乱流の DNS

解析に用いた DNS データは非圧縮性の減衰一様等方乱流を対象とし、計算領域は長さを全方向に 2π 、境界条件は全方向にたいし周期境界条件を適用した。動粘性係数 ν は 0.0013 とし、解像度への依存性を調べるため格子点数が 256^3 (Run 3), 512^3 (Run 2) および 1024^3 (Run 1) とした場合を計算した。計算方法は空間離散化にスペクトル法を用いエイリアシング誤差は $3/2$ 則を用いて除去した。時間積分には低容量 3 次精度 Runge-Kutta 法を用いた。初期条件は速度の rms 値 $u_0 = 1$ で無次元化された初期エネルギースペクトル、

$$E(k) = C k_p^{-1} \left(\frac{k}{k_p} \right)^8 \exp \left\{ -2 \left(\frac{k}{k_p} \right)^2 \right\}, \quad (1)$$

を与えた。ここで k は波数、 C , k_p は定数で、 $C = (256/35) \sqrt{2/\pi}$, $k_p = 2$ である。解像度の影響を見るため格子点数を $256^3, 512^3, 1024^3$ とした 3 ケースの計算を行った。各ケースでのエンストロフィーピーク時 ($t \approx 1.925$) の各種統計量を表 1 に示す。 Re_λ は Taylor microscale と速度の rms 値に基づいたレイノルズ数を示し、 $\langle K \rangle$ は運動エネルギー、 $\langle \varepsilon \rangle$ は散逸率の空間平均値、および $k_{max} \bar{\eta}$ は最小渦の解像度合を示している。図 1 に各ケースでの局所散逸率 ε の確率密度関数 (PDF) を示す。

Run No.	N	Re_λ	$\langle K \rangle$	$\langle \varepsilon \rangle$	$k_{max} \bar{\eta}$
1	256^3	77.2	0.900	0.654	1.02
2	512^3	76.87	0.897	0.654	2.05
3	1024^3	77.43	0.904	0.654	4.09

表 1: 一様等方乱流の計算条件.

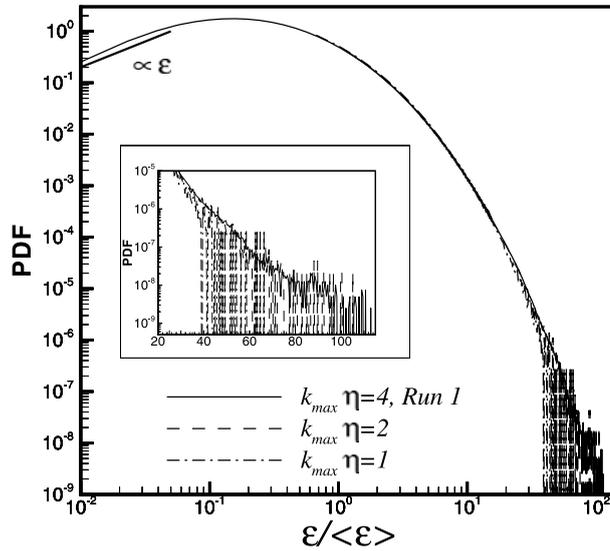


図 1: 乱流中における散逸率の分布.

各ケースで散逸率の空間平均値 $\langle \varepsilon \rangle$ がかなり近い値をとっているにもかかわらず ε の分布は異なっている. 特に ε の最大値はそれぞれ 113.5(Run 1), 105.7(Run 2), 66.63(Run 3) であり, Run 3 において ε の強い間欠性を捕らえられていないことを示している. このことは Sreenivasan(2004)[3] が解像度 $k_{max} \bar{\eta} \approx 1$ である DNS のデータでは散逸構造の微細スケールでの間欠性を示すのに不十分だと指摘していることとも矛盾しない. この点については第 4 章で議論する.

3 多重モード spiral vortex

Spiral vortex は螺旋状に伸びた二葉の渦層とコア領域に形成される渦管によって構成されるが, 渦層状の渦度ベクトルと渦管上の渦度ベクトルの幾何的な配向によって, 図 2 に示すような 3 つのモードに分類できる. 本稿では, このように分類できる構造を総称して多重モード spiral vortex [2] と呼ぶ. 3 つのモードのうち図 2(a)(c) に示されるモード 1, 3 は対称な配向を持ち, 図 2(b) に示されるモード 2 は非対称な配向をもっている.

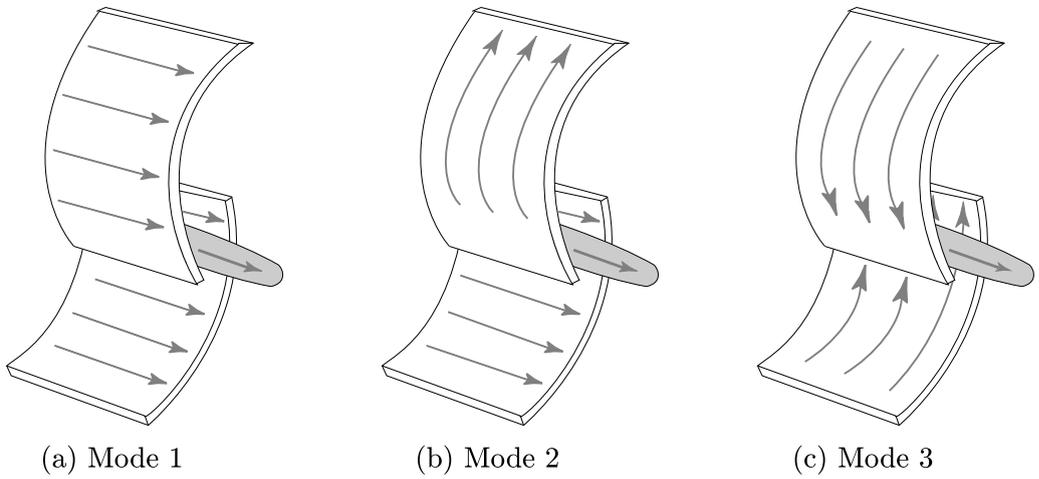


図 2: 渦管と渦層に沿う渦度ベクトルの配向による 3 つのモード. 灰色の矢印は渦度ベクトルを表す.

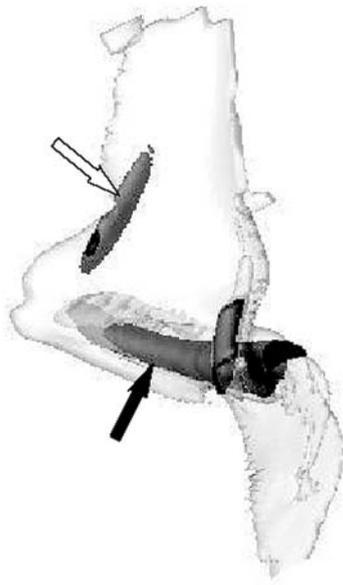


図 3: Spiral vortex の典型例. 白色の等値面が渦層を, 黒色の等値面が渦管を表す.

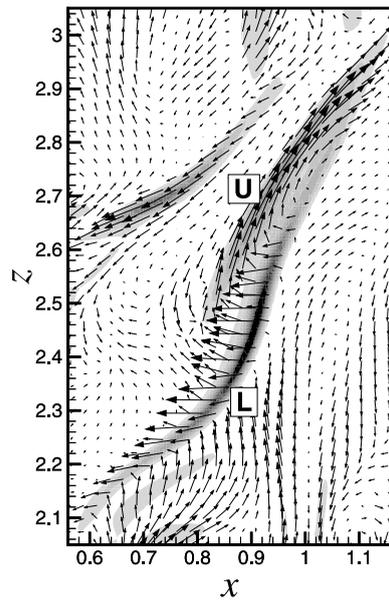


図 4: 渦層 ($[A_{ij}]_+$) の等高線と渦度ベクトルの分布.

ここで渦構造の抽出法について述べておく. 渦層の抽出には二次速度勾配テンソル $[A_{ij}] (= -[S_{ij}\Omega_{ji} + S_{ik}\Omega_{ki}])$, $[A_{ij}]_+[4]$ を用い, 渦管の抽出には圧力 p と速度勾配テンソルの第二不変量 $Q (= S_{ik}S_{ki} + \Omega_{ii}\Omega_{ki})$ を用いる. ここで $S_{ij} (= \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}))$

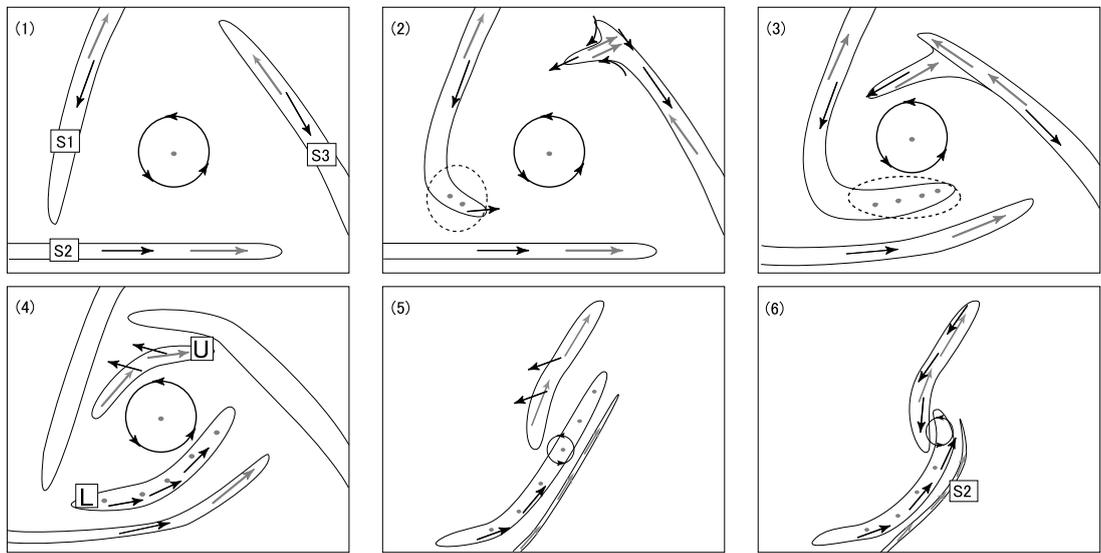


図 5: Mode 2 の Spiral vortex 形成過程の概念図. 黒色の矢印は速度ベクトル, 灰色の矢印は渦度ベクトルを表す. (2),(3) 中において, 破線で囲まれた領域では渦度ベクトルが変換されている.

はひずみ速度テンソルであり, $\Omega_{ij} (= \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}))$ は渦度テンソルである. 本論文では固有ベクトルと渦度ベクトルの平行関係 (alignment) に基づいた固有値の並び替えを行う. 例えば, ひずみ速度テンソル, S_{ij} の固有値 σ_i については, その固有ベクトル \mathbf{e}_i のうち, 渦度ベクトル ω に最も平行となるものを \mathbf{e}_z とし, 対応する固有値を σ_z とする. そして残りの固有値のうち, 大きさが大きいものを σ_+ , 小さいものを σ_- とし, 対応する固有ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_+ , \mathbf{e}_- とする [5, 6].

図 3 は Run 2 の DNS データから渦層を $[A_{ij}]_+$ の等値面で, 渦管を Q の等値面で可視化した spiral vortex の 3 次元図を示す. 黒い矢印で示した Q の集中している領域で示される渦管に渦層が螺旋状に巻き込まれている.

図 3 に示した spiral vortex は, 通常の単葉渦層の不安定性による巻きあがりにより形成されたようにも見えるがそうではない. 図 4 は, 時刻 $t = 1.750$ における, $y = 0.27$ の $x-z$ 断面での $[A_{ij}]_+$ の等高線と渦度ベクトルを示している. 図 3 に示されている渦管はほぼ $x-z$ 断面に垂直であり, 渦管が形成される領域に沿った渦度ベクトル (図 4 の $x \sim 0.9$, $z \sim 2.5$) も $x-z$ 断面に垂直な方向を向いている. ここで渦層は渦管形成領域を中心として非対称な配置を取り, spiral vortex を構成している渦層は単葉 (1 枚) の渦層ではなく, 2 葉 (2 枚) の渦層から成っている. さらに, 図 4 において, 下側の渦層 (図中の L) と上側の渦層 (図中の U) の渦度ベクトルは異なる特性を示している. 実際, 下側の渦層上の渦度ベクトルは $x-z$ 断面に垂直で渦管に対して平行あり, 一方上側の渦層上では, $x-z$ 断面に平行で渦管に対して垂直である. すなわち, ここで示した spiral vortex は, Mode 2 に対応している (図 2(b)).

淀み点流れの安定性解析 [7] から Kelvin-Helmholtz 不安定性による単葉渦層の巻

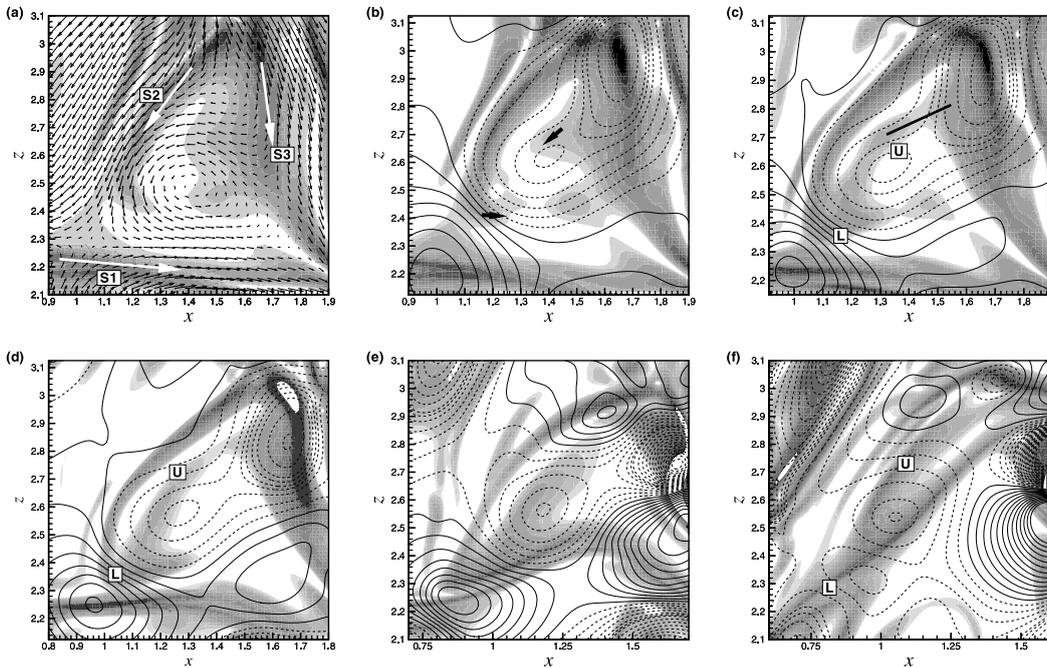


図 6: 渦層 ($[A_{ij}]_+$) の等高線と圧力 p の等高線 ((a) $t = 1.125$; (b) $t = 1.150$; (c) $t = 1.200$; (d) $t = 1.250$ (e) $t = 1.350$; (f) $t = 1.500$). $[A_{ij}]_+$ はグレースケールで, p は実線 (破線は負値) で示されている.

き上がりでは垂直な成分が減衰し, 平行な成分が成長することが示されている. つまり, Kelvin-Helmholtz 不安定性から形成されるのは Mode 1(図 2(a)) の spiral vortex のみであり, Mode 2 のような渦度ベクトルの配向は形成されない.

Mode 2 の spiral vortex の形成過程を解析すると, 以下の 6 段階に大別されるプロセスからなっており, 各段階の渦層・渦管上の渦度ベクトル・速度ベクトルを表した概略図を図 5(1)~(6)に, 実際の DNS データ (Run 2) から得られた, 概略図に対応する各段階を図 6,7 に示す.

[1-1] τ 字型の配置を取る 2 葉の渦層の相互作用によって淀み点流が発生する. このとき, 図 5 中で S1, S2 と表された 2 葉の渦層による淀み点流と, S3 と表されたもう一つの渦層との相互作用によって, その中心に低圧力領域を有する循環流を形成する (図 5(1), 図 6(a)).

[1-2] 循環流によって渦層が伸張され, 伸張された渦層 S1 の先端において, 渦度ベクトルの向きが紙面に平行な向きから垂直な向きに変わる. (図 5 中の破線で囲まれた領域) ここで, 循環流の渦度ベクトルの向きは紙面に垂直である (図 5(2), 図 6(b)).

[1-3] 循環流による, 複葉の渦層の伸張・巻きこみが進み, 渦度ベクトル方向が変換される領域が拡大される (図 5(3), 図 6(c),(d),(e),(f)).

[1-4] 渦層 S1, S3 から引き伸ばされた渦層が分離し, 複葉の渦層 (上側と下側の

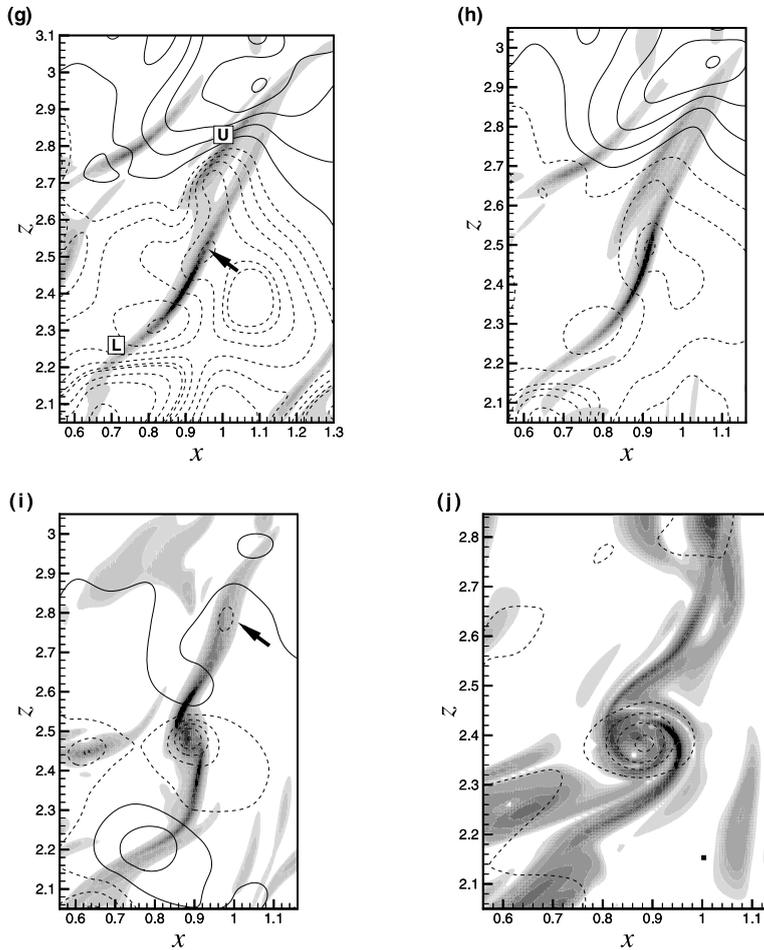


図 7: 渦層 ($[A_{ij}]_+$) の等高線と圧力 p の等高線 ((g) $t = 1.700$; (h) $t = 1.750$; (i) $t = 1.850$; (j) $t = 1.950$).

層から成る) が形成される. この段階では, 下側の渦層に沿う渦度ベクトルの方向は紙面に垂直である (図 5(4), 図 7(g)).

[1-5] 下側の渦層上への低圧力領域の取り込みが発生する. 低圧力領域に沿って渦度の集中・成長が起こり, 渦管のコア領域が形成される (図 5(5), 図 7(h),(i)).

[1-6] 低圧力領域を取り囲む渦層が渦管に巻き込まれ, spiral vortex が形成される (図 5(6), 図 7(j)).

図 7(j) に示された構造は Lundgren[1] の spiral vortex model に相似な構造であるが, 下側の渦層と上側の渦層に沿う渦度ベクトルの配向は, Lundgren[1] のモデルとは異なっている. 図 7(h), (i) からわかるように, 下側の渦層と上側の渦層は引き伸ばされて渦管に巻き込まれている. 図 7(j) において, 渦層は渦管に螺旋状に巻き込まれているが, 剛体回転ではこうした伸張と巻き込みは生じ得ず, 渦管・渦層に

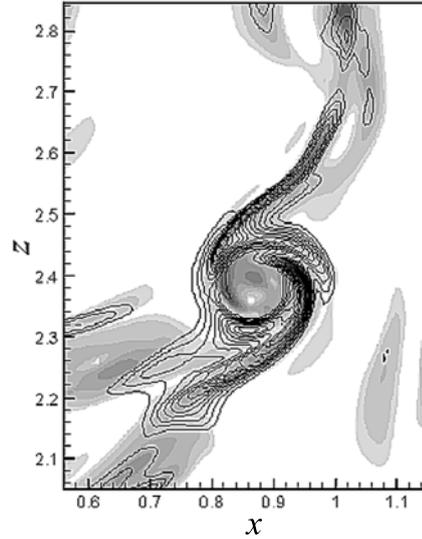
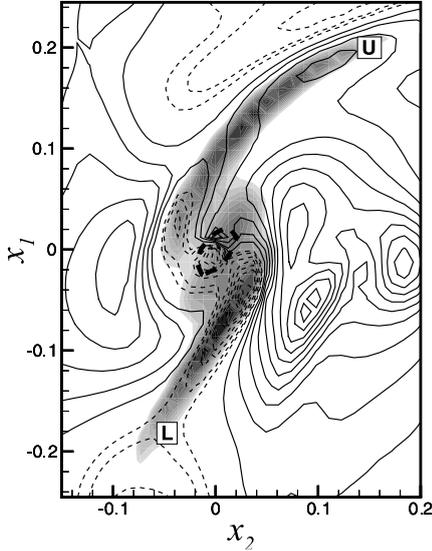


図 8: 中心部の渦管に垂直な断面における渦層 $[A_{ij}]_+$ の等高線と Differential Rotation 項の等高線。 図 9: 渦層 $[A_{ij}]_+$ の等高線と散逸率の等高線。

よる差動回転が寄与していると考えられる。図 8 は、差動回転の大きさを表す指標、

$$D = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right), \quad (2)$$

の等高線を示している。差動回転を算出する際に渦管の中心軸を特定する必要があるが、その軸の特定には Kida and Miura [8] による低圧力渦抽出法を用いた。図 8 は、図 7(i) 中の $x \sim 0.9$, $z \sim 2.46$ に存在する渦管の軸に垂直な x_1 - x_2 平面での等高線を示しており、 x_1 - x_2 座標での原点は注目している渦管の軸に一致する。式 (2) で表される D 項は x_1 - x_2 平面の原点を中心とする極座標、すなわち r - θ 座標 (r は径方向、 θ は周方向) において計算され、 u_θ は θ 方向の速度成分を表している。渦管中心部で D 項は小さな値を示し、中心部が剛体回転していることを示している。また、渦層上に D 項が大きな値を取る領域が存在している。初期状態において周方向長さと厚さがともに l_0 である渦塊 (vorticity blob) は、時間 t が経過すると、周方向長さと厚さがそれぞれ $l_0 Dt$, $l_0/(Dt)$ となるため [9], D 項の値が大きい程、渦層はより大きな伸張を受け薄くなる。

図 9 に $t = 1.950$ における $[A_{ij}]_+$ と散逸 (ϵ) の分布を示す。差動回転による伸張により spiral turns が形成され、強い散逸が引き伸ばされた渦層上に沿って生成している。この後、渦管は時間の経過と共に減衰する。

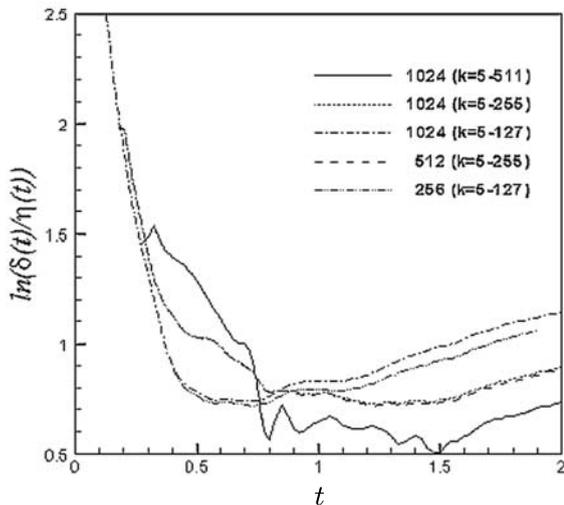


図 10: Kolmogorov scale で正規化された $\ln\delta(t)$ の時間変化.

4 格子解像度にたいする依存性

前章に示したように spiral vortex の形成過程において渦層は非常に薄くなっている. 渦層の平均的な厚さはエネルギースペクトルを次式で示される関数で近似することにより見積もることができる.

$$E(k, t) = c(t)k^{-n(t)}e^{-2\delta(t)k}, \quad (3)$$

ここで $\delta(t)$ は対数減衰率, $n(t)$ は algebraic prefactor と呼ばれ, $\delta(t)$ は渦層厚さを見積もる指標になる [10]. 図 10 は各時刻でのエネルギースペクトルを式 (3) に最小近似して得られた $\delta(t)$ の時間変化を $\bar{\eta}$ で正規化して示している. ここで式 (3) の近似は初期条件の影響が強い低波数を除いた $k/\bar{\eta} \geq 0.3$ の区間にたいして行った. $t \sim 0.4$ までは粘性の効果が見れないため指数関数的に減少するが, 最小値をとって以降 $\delta(t)$ は漸近値に収束している. 同じ波数区間にたいして近似した場合においてはほぼ同様の時間変化をするにもかかわらず. 波数 $k = 5 - k_{max}$ の区間で式 (3) を近似した場合, 渦層厚さの漸近値は Run 1 の場合 ($\approx 2.05\bar{\eta}$) において Run 2 ($\approx 2.34\bar{\eta}$), Run 3 ($\approx 3.21\bar{\eta}$) よりも薄くなっており, Run 2, Run 3 の場合に spiral vortex の微細スケールの構造が十分に解像できていないことを示している.

微細スケールの構造が解像できないことによる影響は図 1 に示した PDF の高散逸率の tail のように割合的に非常に小さいが, 抽出した spiral vortex の微細スケールの構造には解像度の影響を見ることができる. 図 11 に $t = 2.0$ に Run 1, 2 の DNS データから抽出した $[A_{ij}]_+$ の等高線を示す. 太い破線で示される低圧領域に形成された spiral vortex のコア領域に引き伸ばされた渦層が巻きついており, 渦層はいくつものスケールで褶曲している. つまり, spiral vortex の特徴で重要なのは構造全体のスケールから最小スケールまでのあらゆる長さスケールが生成されることなのである. Run 3 ($k_{max}\bar{\eta} \approx 1.0$) (figure not shown) において, 渦管は十分に

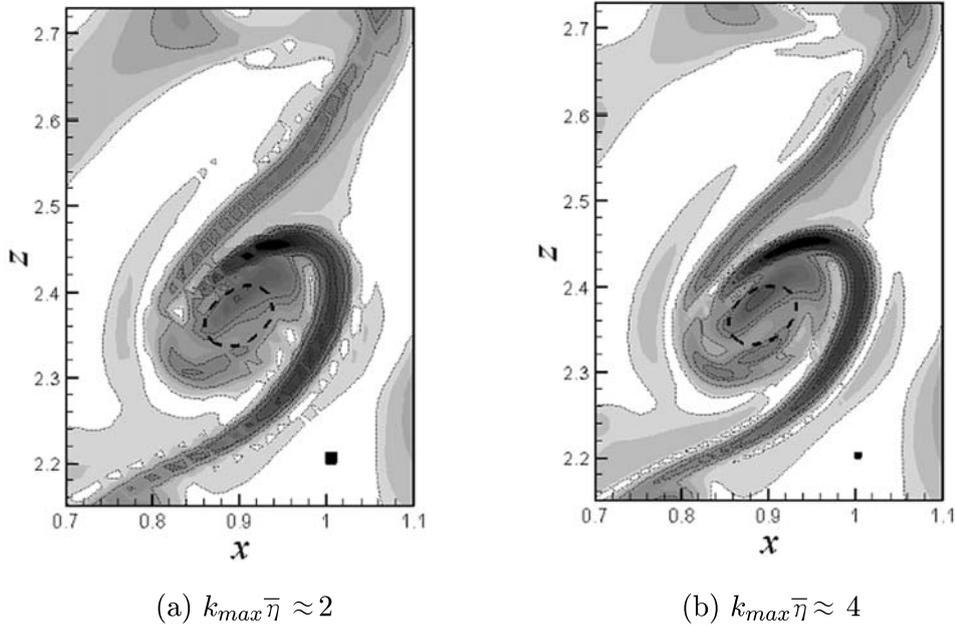


図 11: 解像度にたいする依存性

解像されているにもかかわらず，渦層の spiral turns は全く見る事ができなかった．Run 2($k_{max}\bar{\eta} \approx 2.0$)においては，spiral turns を確認できるが渦層が断片化してしまっており十分に解像できていない．そして Run 1($k_{max}\bar{\eta} \approx 4.0$)においては，Schumacher, Sreenivasan & Yeung(2005)[11] の示したように断片化が消えている．図 11 の $(x, z) \approx (1.0, 2.2)$ に単位計算格子を黒い正方形で示した．単位計算格子の一边長 (Δ) は各々 $0.78\bar{\eta}$ (Run 1), $1.57\bar{\eta}$ (Run 2), $3.14\bar{\eta}$ (Run 3) である．図 11 と Δ の値から渦層の厚さを見積ると約 $2\bar{\eta}$ であり式 (3) からの見積もりとほぼ一致する．

5 構造のフラクタル特性

spiral vortex の形成過程において渦層上に散逸が生成されることが確認できたので，散逸構造と渦層構造との相関を検証する．渦層の層状であるという形状の特徴に注目し，形状の特徴を定量的に評価する方法としてフラクタル次元 (d) を導入する．本研究ではフラクタル次元を box counting 法を用いて定義する．box counting 法は空間を一边を長さ L の立方体に分割し，構造を含む立方体の数 $N(L)$ を数える方法であり， L と $N(L)$ の間に

$$N(L) \propto L^{-d} \tag{4}$$

という関係が成り立つ場合，その構造のフラクタル次元は d である．単純な直線や平面にこの方法を適用した場合， d はそれぞれ 1, 2 のような整数となり経験的な次元と一致する．

図 12 に $t = 1.925$ において閾値 $\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle \approx 9.17$ で抽出した散逸構造のうち大きい

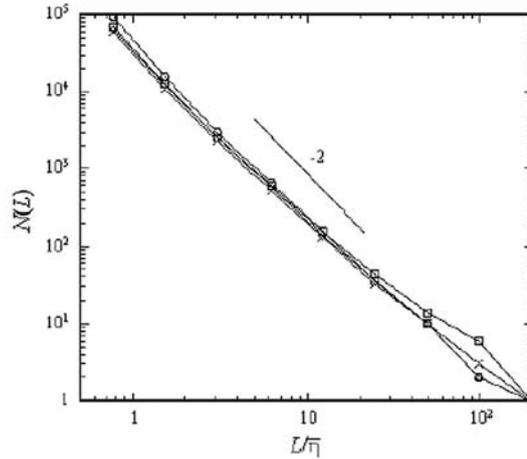


図 12: Box counting 法の結果

ほうから 4 つに box counting 法を適用した結果を示す. 図の中ほどにおいて明らかに一定の傾きを持っており, 明確なフラクタル特性が見られる. 一般に自然界に存在しフラクタル特性を示すものの場合, フラクタル特性を示すスケールの上限と下限が存在する. 本研究ではフラクタル特性を示すスケールの区間の上限を $L_u(N(L_u) = 10)$, 下限を $L_l = 6\bar{\eta}$ とし, $L_l \leq L \leq L_u$ での傾きの平均値を構造のフラクタル次元とした [12].

図 13 は Run 1, 2 および 3 の DNS データから算出したフラクタル次元を示す. ここでフラクタル次元は個々の構造から得られた d の平均値である. 解像度が高くなるにつれてフラクタル次元は約 1.8 に漸近しており, 散逸構造が (しわのよった) 層状の形状をしていることを示唆している. 渦層と散逸率のフラクタル次元は近い分布を示しており, 渦層と散逸構造のフラクタル特性が相似であることがわかる.

また, 図 14 に $t = 1.925$ における $[A_{ij}]_+$ と ε の結合確立密度関数を示す. 渦層と散逸場が強い相関を持っていることがわかり, 相関係数も 0.81 と高くなっている.

6 まとめ

本研究では DNS データを用いて一様等方乱流中における spiral vortex の生成・成長・減衰過程を示し, 渦層が渦管に螺旋状に巻き込まれていく過程で spiral turns が形成され, 渦層に沿って強い散逸が生成されることを示した. また, 渦層の厚さの見積もりを示し, spiral vortex および散逸構造の微細スケールの解像には $k_{max}\bar{\eta} \approx 4$ の解像度が必要であることを示した. さらに, 渦層と散逸構造のフラクタル特性を解析し, 渦層と散逸構造の間に強い相関があることを示した.

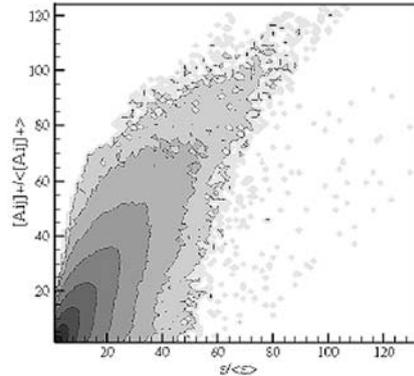
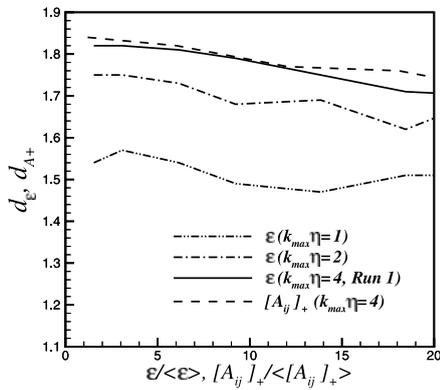


図 13: 散逸領域および渦層のフラクタル次元.

図 14: 渦層 ($[A_{ij}]_+$) と散逸率の結合確率密度関数.

7 謝辞

本研究における DNS の実行および DNS データの解析に当たり東北大学情報シナジーセンターの大規模科学計算システムを大いに利用させていただいた．ここに感謝の意を表す．

参考文献

- [1] Lundgren, T.S., Phys. Fluids 25, 2193–2203 (1982)
- [2] 高木洋平, 博士学位論文, 東京工業大学 (2006)
- [3] Sreenivasan, K.R., Turbulence and Combustion 72, 115–131(2004)
- [4] Horiuti, K. and Takagi, Y., Phys. Fluids 17, 121703 (2005)
- [5] Horiuti, K., Phys. Fluids 13, 3756–3744(2001)
- [6] Andreotti, B., Phys. Fluids 9, 735–742(1997)
- [7] Kerr, O.S., J. Fluid Mech. 491, 307–325(1994)
- [8] Kida, S. and Miura, H., J. Mech B/Fluids 17, 791–488(1998)
- [9] Gilbert, A.D., Phys. Fluids A 5, 2831–2834(1993)
- [10] Passot, T., Politano, H., Sulem, P.L., Angilella, J.R. and Meneguzzi, M., J. Fluid Mech. 282, 313–338(1995)

- [11] Schumacher, J., Sreenivasan, K.R. and Yeung, P.K., *J. Fluid Mech.* 531, 627–632 (2005)
- [12] Moisy, F. and Jiménez, J., *J. Fluid Mech.* 513, 111–133(2004)