

[共同研究成果]

有限要素法によるチャネル乱流の LES 解析

三浦 慎一郎

東京都立産業技術高等専門学校

1 はじめに

工学的問題に見られる複雑形状を有する流れ場の解析では、非構造格子（有限要素法の場合は、要素）への適用性や境界条件の扱いやすさから、差分法や有限体積法などに比べて汎用性や高精度化に関して、有限要素法は優れていると考えられる。一方、有限要素法は有限要素内の係数行列を組み立て、全体系への方程式を構成しそれを解くことに帰着されるため、各種係数行列の組み立てや大規模な行列を扱う必要があり計算コストの掛かる手法であるといわれている。有限要素法を用いた流体計算では計算機資源の問題から、高速化・低容量化に向け様々な工夫が行われているが、それに伴う離散化の際の近似が解に及ぼす影響は少なくないと考えられる。その結果、計算精度の点で差分法との比較において、有限要素法の優位性は必ずしも示されていないと思われる。

そこで本研究では、これまで計算資源の不足から十分に検証できていなかった計算精度について焦点をあて、有限要素法に対する精度の検証を行うことを目的としている。特に、質量行列や対流項、粘性項の離散化など計算機資源の問題で近似的な方法で行わざる得なかった手法に対して、スーパーコンピュータによる高速化・大容量化によって改善する手法を提案する。提案する有限要素スキームを乱流計算のベンチマーク問題の一つとして知られているチャネル乱流（平行平板間の乱流）に適用する。チャネル乱流問題は、単純な形状であり周期境界条件の設定によりスペクトル法を基本とする直接数値シミュレーション（Direct numerical simulation, DNS）による計算も可能である。したがって、乱流モデルの検証や数値計算法の妥当性の検証問題として広く用いられている。特に差分法分野では、格子の配置や差分近似精度などの点で多く検討されており^[1]、近似解の精度の向上が見られている。DNS や差分法で計算される低レイノルズ数領域における乱流場での有限要素計算を行い、DNS データベースとの比較を通じて乱流統計量の予測に関して検討する。有限要素スキームとして、時間積分法に関しては差分法で良く

用いられている 2 次精度 Adams-Bashforth 法および、壁方向の物理粘性項に関しては陰解法である Crank-Nicolson 法を用い、空間に関しては、差分法における中心差分に相当する Galerkin 有限要素法を用いる。また本有限要素スキームでは、対流項に関して保存型で扱うことや、有限要素法でよく用いられる質量行列の集中化に関して改善を与える点に特徴を有する。乱流モデルは、Large eddy simulation(LES) に基づく Dynamic SGS モデル^[2]を用いて、パラメータの推定なども行う。チャンネル乱流場では、壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数 180 及び 395 により、乱流統計量の検証を行う。

また、計算の高速化を図るための有限要素法向きのベクトル化法や並列化についても言及する。

2 LES 基礎方程式及び数値計算法

2.1 基礎方程式

基礎方程式は非圧縮性粘性流体を仮定した Navier-Stokes 方程式と連続の方程式に対し、壁面摩擦速度 u_τ 及び平板間の半値 δ で代表速度及び代表長さをとるものとし、LES に基づく空間フィルタを仮定したフィルタリングを行う。フィルタ操作を Navier-Stokes 方程式に適用することにより、以下のフィルタリングされた方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ であり、 f_i は外力項で本計算の場合は主流方向に圧力勾配が一定になるような条件を与える。 τ_{ij} は Smagorinsky モデルまたは Dynamic SGS モデルを用いてモデル化され、いずれにおいても、

$$\tau_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} - (C\bar{\Delta})^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

として与えられる。ここで、式 (3) に含まれる定数 C は Smagorinsky 定数と呼ばれ、本計算のようなチャンネル問題において Smagorinsky モデルを用いた場合、 $C = 0.1$ が最適値として良く用いられている。一方、Dynamic SGS モデルは Germano ら^[2]によって提案され、テストフィルタと呼ばれる概念を導入し、定数 C を動的に求める。

運動方程式 (1) と連続の方程式 (2) の計算のアルゴリズムに分離解法の一つである fractional step 法を用いる。空間に関する離散化は、一般的なガラーキン有限要素法により定式化し、時間積分法として、対流項及び拡散項に 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は以下のようになる。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^* - \bar{u}_{i\beta}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3f_{i\alpha}^n - f_{i\alpha}^{n-1}) \quad (5)$$

ただし、

$$f_{i\alpha}^n = K_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_{j\gamma}^n \bar{u}_{i\beta}^n - \left(\nu_t^n + \frac{1}{Re_\tau} \right) D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n - F_{i\alpha}^n \quad (6)$$

ここで $K_{\alpha\beta\gamma}$ は対流項であり発散型で離散化している [3]。 $D_{\alpha\beta}$ は拡散項の係数行列を表し、各要素領域 (Ω_e) 及びその境界領域 (Γ_e) での係数行列は以下のようになる。

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} N_\beta N_\gamma d\Omega, \quad (7)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} d\Omega, \quad (8)$$

$$F_{i\alpha} = \int_{\Gamma_e} N_\alpha \bar{u}_i \bar{u}_j n_j d\Gamma \quad (9)$$

ここで N_α は補間関数であり、本計算では 6 面体要素に対する双 1 次補間関数を用いる。 n_j は x_j 方向の単位法線ベクトルである。

一方、壁方向の運動方程式に関しては陰解法を用いる。物理粘性項に 2 次精度 Crank-Nicolson 法、対流項及び渦粘性による拡散項を 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は、以下のように 2 段階で計算する。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^* - \bar{u}_{i\beta}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3g_{i\alpha}^n - g_{i\alpha}^{n-1}) \quad (10)$$

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^{**} - \bar{u}_{i\beta}^*}{\Delta t} = \frac{1}{2Re} D_{\alpha\beta} (\bar{u}_{i\beta}^{**} + \bar{u}_{i\beta}^*) \quad (11)$$

ただし、

$$g_{i\alpha}^n = K_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_{j\gamma}^n \bar{u}_{i\beta}^n - \nu_t^n D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n - F_{i\alpha}^n \quad (12)$$

圧力に関する方程式は時間に関して 1 次陰的オイラー法を適用し、次式を得る。

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{**}}{\Delta t} = - \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_i} \quad (13)$$

ここで、修正速度ポテンシャル ϕ を用いて、圧力 \bar{P} を次式のようにおく。

$$\bar{P}^{n+1} = -\frac{\phi}{\Delta t} \quad (14)$$

式 (14) を式 (11) に代入して、次式を得る。

$$\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{**} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (15)$$

さらに、式 (13) に両辺の発散をとり、非圧縮条件として $\frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0$ を仮定すると、次式のポアソン方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial \bar{u}_i^{**}}{\partial x_i} \quad (16)$$

以上により、修正速度ポテンシャル ϕ に関する連立方程式を解いて、式 (12) から圧力、式 (13) から流速が求められる。

各有限要素方程式は、以下で表される。

$$D_{\alpha\beta} \phi_\beta = K_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^{**} \quad (17)$$

$$M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^{**} + K_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (18)$$

以上の有限要素方程式を全体系に重ね合わせたのち、各物理量を求める。その他、圧力に関する Poisson 方程式に対しても Galerkin 有限要素法を用いる。また補間関数は流速、圧力共に 8 節点双 1 次補間関数を用いる。Crank-Nicolson 法を適用した場合の陰解法部分には対角スケーリング付き共役勾配法 (CG 法, 収束判定 L2 ノルム 10^{-12})、圧力ポアソン方程式に関する連立方程式の解法には対角スケーリング付き共役残差法 (CR 法, 収束判定 L2 ノルム 10^{-3}) を用いる。

2.2 質量行列の定式化

有限要素法における質量行列は、高速かつ低記憶化を図るため次式のように集中質量行列により近似されることが多い。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} \quad (19)$$

式 (19) により質量行列は対角成分のみになり、例えば式 (3) では、次のように陽的に計算を行うことができる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^* = \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n + \frac{\Delta t}{2} (3f_{i\alpha}^n - f_{i\alpha}^{n-1}) \quad (20)$$

一方、集中化質量行列に伴なう離散化誤差の低減を図るため、次式で示される multi-pass アルゴリズムを用いることも考えられる。

$$\overline{M}_{\alpha\beta} U_{i\beta}^{(k)} = (M_{\alpha\beta} - \overline{M}_{\alpha\beta}) U_{i\beta}^{(k-1)} + \frac{\Delta t}{2} (3f_{i\alpha}^n - f_{i\alpha}^{n-1}) \quad (21)$$

ただし、 $U_{i\beta}^{(k)} = u_{i\beta}^* - u_{i\beta}^n$ であり、 $k = 1$ で集中化質量行列を用いた場合に一致する。一般的に $k = 3$ が用いられることが多い。この計算方法においても、陽的に計算を行うことができる。

2.3 Dynamic SGS モデルによる定数の算出

Smagorinsky モデルでは、Smagorinsky 定数が一定で与えるが、Dynamic SGS モデルでは、テストフィルタを用いて Smagorinsky 定数が決定される。

$$(C\overline{\Delta})^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij}^* M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (22)$$

$$L_{ij}^* = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{ij}, \quad L_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \quad (23)$$

$$M_{ij} = \alpha^2 \left| \widetilde{S} \right| \widetilde{S}_{ij} - \left| \widetilde{S} \right| \widetilde{S}_{ij}, \quad \alpha = \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}} \quad (24)$$

ここで式 (24) に含まれる α は DynamicSGS モデルのパラメータであり、本研究では $\alpha = 2$ で固定する。

$$\widetilde{f}_i = \overline{f}_i + \frac{\widehat{\Delta}_k}{24} \frac{\partial^2 \overline{f}_i}{\partial x_k^2} \quad (25)$$

$$\widehat{\Delta}_k = \gamma_k \overline{\Delta}_k \quad (26)$$

ここで、 $\overline{\Delta}_k$ は k 方向の要素長さであり、 γ_k は k 方向の要素長さに比例したテストフィルタ幅を決定するためのパラメータとなる。一般的には各方向に同じ定数 ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$) を与えるが、不等長要素でテストフィルタを課さない場合は、その方向のみ $\gamma_i = 0$ を与える場合がある。このとき、式 (24) に含まれるパラメータ α もそれを考慮した値を用いる必要がある。

式 (25)、(26) 式より、テストフィルタに関する値 \widetilde{u}_i 、 $\widetilde{u_i u_j}$ 、 \widetilde{S}_{ij} 、 $\left| \widetilde{S} \right| \widetilde{S}_{ij}$ を求めることができる。式 (25) は、次のように Galerkin 有限要素を適用する。

$$M_{\alpha\beta} \widetilde{f}_{i\beta} = M_{\alpha\beta} \overline{f}_{i\beta} - \frac{\widehat{\Delta}_k}{24} D_{\alpha\beta k} \overline{f}_{i\beta} \quad (27)$$

ここで係数行列 $D_{\alpha\beta k}$ は、拡散行列 $D_{\alpha\beta}$ の k 方向成分である。さらに、式 (27) は質量行列を含む式でありこのままでは連立方程式を解く必要があるが、式 (27) の左辺の質量行列を集中化し、陽的に計算を行う。本研究で multi-pass アルゴリズムを用いる場合には、修正子の計算 (式 (18)) に対しても multi-pass を用いる。

各要素の係数行列は Gauss の数値積分法 (各方向それぞれ 3 点) を基本として行われるが、式 (7) における対流項の係数行列 $K_{\alpha\beta\gamma}$ については解析的に計算を行う。各要素の係数行列はメモリ上に記憶され、時間ステップ中に係数行列の再計算は行わない。

2.4 並列化法及び行列の格納方法

本計算ではベクトル並列計算機を用いるために、並列化及びベクトル化を意識したコーディングを行う。並列化は有限要素法の場合、間接参照によるループが多いため、自動並列化機能が働かない。そこで本プログラムでは、OpenMP による並列化を行う。

ベクトル化については、本計算のような有限要素法では大規模連立方程式を解く必要があり、これに対する行列積の計算が最も負荷が大きい。特に有限要素法では差分法の場合と異なり、単純な n 重対角行列とはならないため、全体系行列の格納方法^[5]が非常に重要となる。

一般的にスカラ (並列) 計算機ではキャッシュ効果が期待できる Compressed row storage (CRS) 形式が有効である。しかしこの方法は最内ループのベクトル長が短く、ベクトル計算機ではほとんどベクトル化の効果が期待できない。そこで本研究では、ベクトル化率を高めるために Compressed diagonal storage (CDS) 形式^[6]を採用した。この他、Jugged diagonal storage (JDS) による検証も行ったが、CDSの方が若干ベクトル化率が高く、演算速度については、CDS形式に比べてJDS形式では半分程度の速度しか出ていなかった。また、CRS, JDS, CDSのいずれの格納方法も並列化に関しては問題はない。プログラム 1 に CDS 形式を用いて、OpenMP による並列化を行ったプログラムを示す。

この他有限要素法に特化した手法として、Element-by-Element 法 (EBE) なども良く用いられるが、本研究では検証していない。

```

!$omp parallel private(i,ista,iend,imin,imax,id_num)
!
    nb_threads = OMP_GET_NUM_THREADS()
    id_num      = OMP_GET_THREAD_NUM()
    ista        = na* id_num      /nb_threads + 1
    iend        = na*(id_num + 1)/nb_threads
!
    do i = ista, iend
        ax(i) = 0.0d0
    enddo
    DO j = 1, nd
        k = la(j)
        imin = MAX(ista, 1 - k)
        imax = MIN(iend, na - k)
        do i = imin, imax
            ax(i) = ax(i) + a(i,j)*x(k+i)
        enddo
    enddo
!$omp end parallel

```

Prog.1 CDS 形式による行列ベクトル積の OpenMP 化

3 計算条件及び計算結果

数値計算手法の有効性を検討するために、チャンネル乱流（平行平板間 Poiseuille 流れ）に適用する．本計算では、 $Re_\tau = 180, 395$ における乱流場を LES を用いて計算を行う．本計算で用いる SGS モデル、壁座標系における要素幅を表 1 に示す．計算領域は、主流方向を x_1 、垂直方向を x_2 、スパン方向を x_3 とし、その領域長さは $Re_\tau = 180$ において $4\pi\delta \times 2\delta \times (4/3)\pi\delta$ 、 $Re_\tau = 395$ では、 $2\pi\delta \times 2\delta \times (2/3)\pi\delta$ により計算を行う．

主流方向及びスパン方向には周期境界条件を課す．要素分割方法は垂直方向成分には tanh 関数よりなる不等長要素とし、他の方向には等分割する．上下壁面の条件はすべり無し条件を与える．乱流統計量に関しては充分発達した乱流場から時間及び空間のアンサンブル平均から求める．それらのデータを Moser ら^[4] の DNS データと比較する．

Table1 Finite Element Mesh and Model Parameter

Case	mass matrix	SGS model	Re_τ	Δx_1^+	Δx_2^+	Δx_3^+
Case1a	multi-pass	no-sgs	180	70.7	1.0 - 11.2	22.5
Case2a	multi-pass	Smagorinsky	180	70.7	1.0 - 11.2	22.5
Case3a	lumping	Dyn. ($\gamma = 2$)	180	70.7	1.0 - 11.2	22.5
Case4a	multi-pass	Dyn. ($\gamma = 2$)	180	70.7	1.0 - 11.2	22.5
Case5a	multi-pass	Dyn. ($\gamma = \sqrt{6}$)	180	70.7	1.0 - 11.2	22.5
Case3b	lumping	Dyn. ($\gamma = 2$)	180	35.4	1.0 - 11.2	11.3
Case4b	multi-pass	Dyn. ($\gamma = 2$)	180	35.4	1.0 - 11.2	11.3
Case5b	multi-pass	Dyn. ($\gamma = \sqrt{6}$)	180	35.4	1.0 - 11.2	11.3
Case6b	multi-pass	Dyn. ($\gamma = 2\sqrt{3}$)	180	35.4	1.0 - 11.2	11.3
Case4c	multi-pass	Dyn. ($\gamma = 2$)	395	25.8	0.9 - 31.2	8.2
Case5c	multi-pass	Dyn. ($\gamma = \sqrt{6}$)	395	25.8	0.9 - 31.2	8.2
Case6c	multi-pass	Dyn. ($\gamma = 2\sqrt{3}$)	395	25.8	0.9 - 31.2	8.2

なお本研究では、大規模な計算を必要とする場合のみをベクトル型並列スーパーコンピュータ (SX-7) を用いて計算を行った。したがって、表1に示される Case1a~Case5a までは計算負荷がそれほど大きくないため、SX-7では計算を行っていない。そこで、本研究での計算結果はSX-7による Case3b~Case6c の場合の計算結果を示す。

図1に $Re_\tau = 180$ における主流流速成分の計算結果をDNSによるデータと比較する。Dynamic モデルに対して、式(26)に対して $\gamma = 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}$ を用いて検討を行う。また、multi-pass アルゴリズムを用いたものと、集中化質量行列 (lumping mass matrix) を用いたもので計算を行った。いずれの結果も壁法則に従う $y^+ = u^+$ の領域から、粘性低層に至るまでほぼ同じ計算結果を示しているが、対数領域においては、質量行列の集中化を行った Case3b の流速が低い値となっている。その他は、DNSの計算と良く一致しておりパラメータ γ の依存性は少ないが、 $\gamma = \sqrt{2}$ を与えた Case4b ではチャンネル中心付近での流速がDNSデータに比べて僅かに低い値を示している。

図2に $Re_\tau = 180$ における各流れ方向の乱流強度 (乱れ強度) 分布及び、Reynolds 応力の比較を示す。それぞれの計算において乱流強度分布の大きな違いは見られないものの、集中質量行列を用いた Case3b の結果において、スパン方向の乱れ強度が、DNSを含む他の手法に比べて小さく見積もられて

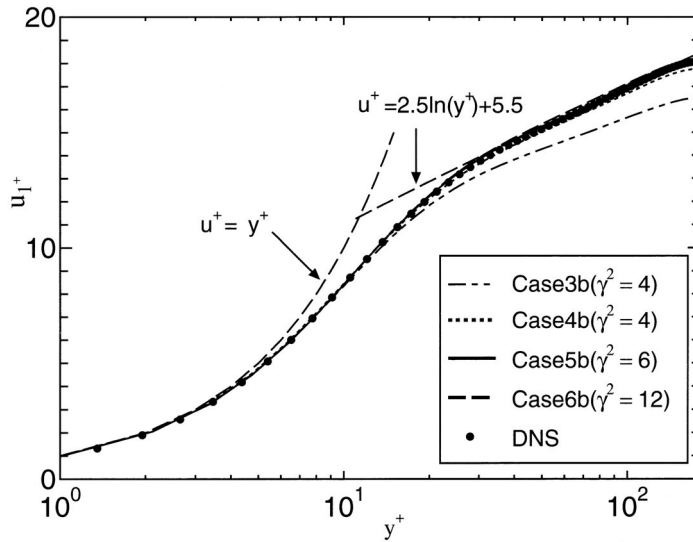


図 1: Mean streamwise velocity at $Re_\tau = 180$

いることがわかる．これはメッシュ解像度が不足している場合に見られる傾向である．他の multi-pass を用いた手法では，DNS の結果に良く一致している．しかし，主流方向成分の乱れ強度のピーク値がやや大きく見積もられている．これもメッシュ解像度が不足した場合に見られる傾向であるが，それ以外では DNS のデータに一致しており，非常に精度の良い計算が行われていることが分かる．Reynolds 応力の比較では， γ の値による結果の違いが見られる． $\gamma = \sqrt{6}$ ，または $\gamma = 2\sqrt{3}$ を用いた値が良好であることがわかる．

図 3 に渦粘性係数の壁方向の分布を示す．本計算では，渦粘性係数は周期方向に平均化を行っているため，渦粘性係数は 1 次元的な分布となる．Dynamic SGS モデルでは渦粘性の負値を取ることがあるため計算が不安定になる場合があるが，平均操作を行うことでこれを回避している．したがって，クリッピングなどの操作は行っていない．

図 3 から，パラメータ γ の値に比例して渦粘性係数が大きくなっていることが分かる．しかし集中化を行っている Case3b では，multi-pass を用いた Case4b に比べてピーク値が約半分の値となっていることが分かる．このことから，渦粘性が過小評価されていることから，主流方向流速が低く見積もられていると考えられる．また今回の結果では示していないが，LES を用いない no-sgs モデルを実行した際に主流流速が小さく評価されることを確認している．集中化質量行列による渦粘性の適切な効果が得られなかったため，主

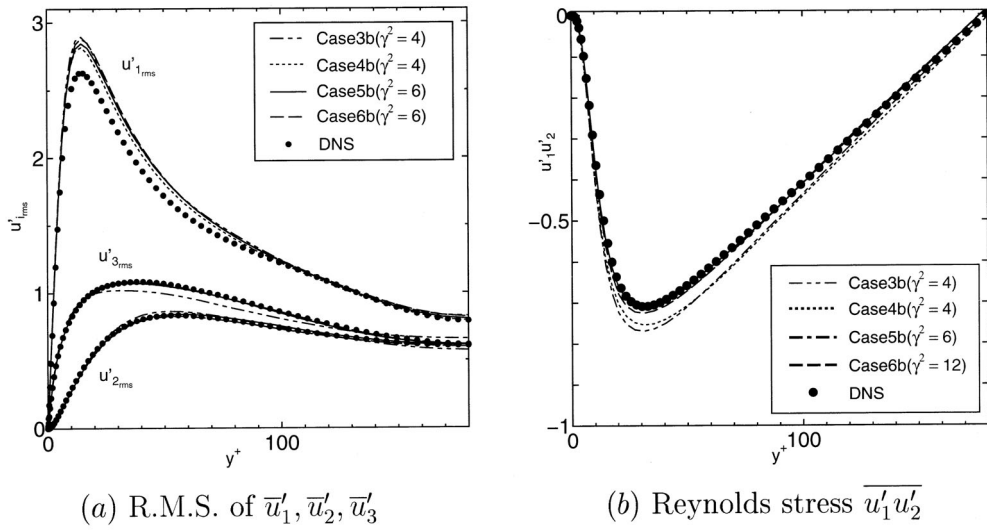


图 2: Distribution of turbulent stresses at $Re_\tau = 180$

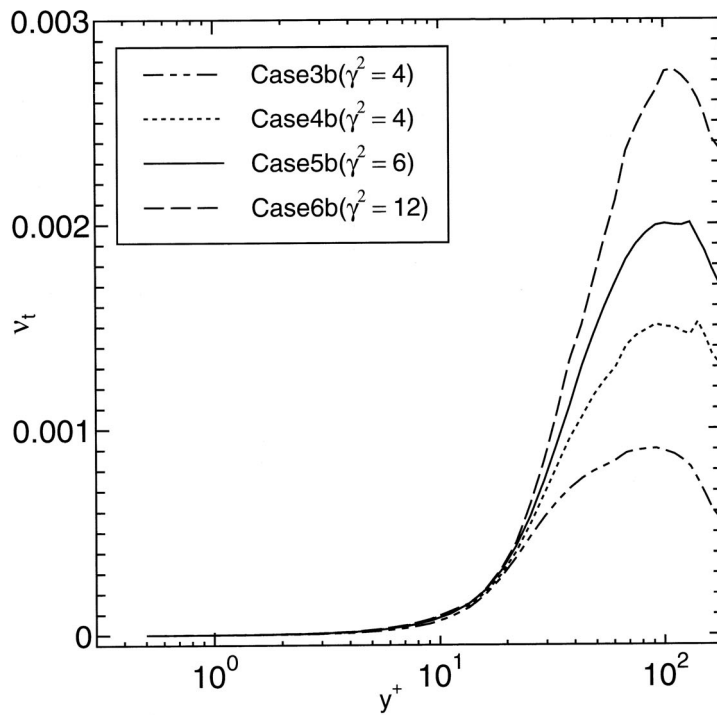


图 3: Distribution of eddy viscosity coefficient at $Re_\tau = 180$

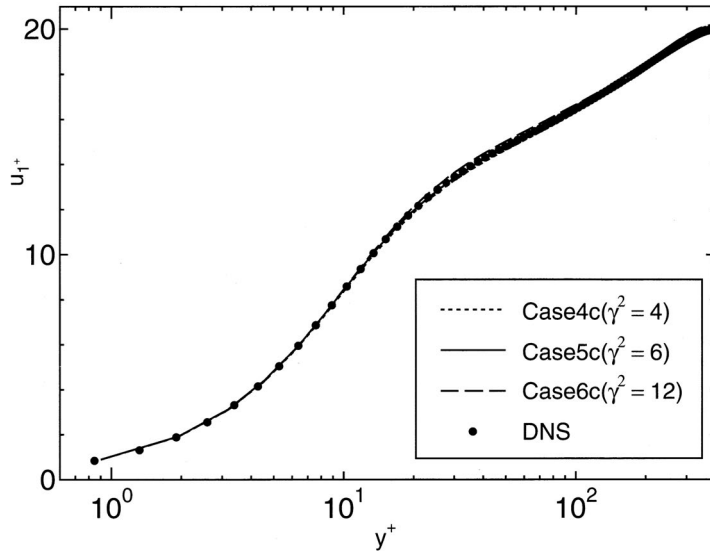


図 4: Mean streamwise velocity at $Re_\tau = 395$

流方向成分の過小評価となったと考えられる。

図 4 に、Dynamic SGS モデルを用いた $Re_\nu = 395$ における主流方向流速成分を示す。いずれの γ に関わらず DNS データに収束していることが分かる。しかし若干、 $\gamma = 2\sqrt{3}$ の Case6c では流量が大きくなり、 $\gamma = \sqrt{2}$ では流量が過小評価されており、もっとも DNS に近いのは $\gamma = \sqrt{6}$ の Case5c であるが、いずれの場合もその差は大きくない。

図 5(a) 及び (b) に $Re_\nu = 395$ における乱れ強度及び Reynolds 応力の分布を示す。図 5(a) の乱れ強度に関してはほとんど差異が見られない。 $Re_\tau = 180$ ではピーク値が過大評価されていたが、この計算ではそれが改善されている。これはメッシュの依存性によるものであり、計算領域を小さくしさらに、メッシュ分割数も若干多くしたため、解像度が上がったためである。チャンネル中心付近での DNS への収束性は、 $\gamma = 2\sqrt{3}$ の場合が良いものの、その差はごく僅かである。

図 5(b) に関して、Reynolds 応力値のピーク値に差異が見られる。 $\gamma = \sqrt{6}$ の Case5c の場合が最も DNS に近い結果となっている。

図 6 に $Re_\nu = 395$ における渦粘性係数の分布を示す。テストフィルタ幅の小さい $\gamma = 2$ と幅の大きい $\gamma = 2\sqrt{3}$ では、渦粘性の値も 2 倍近くの差があることが分かる。しかし、主流方向流速や乱れ強度から得られる差異はそれほど大きくない。

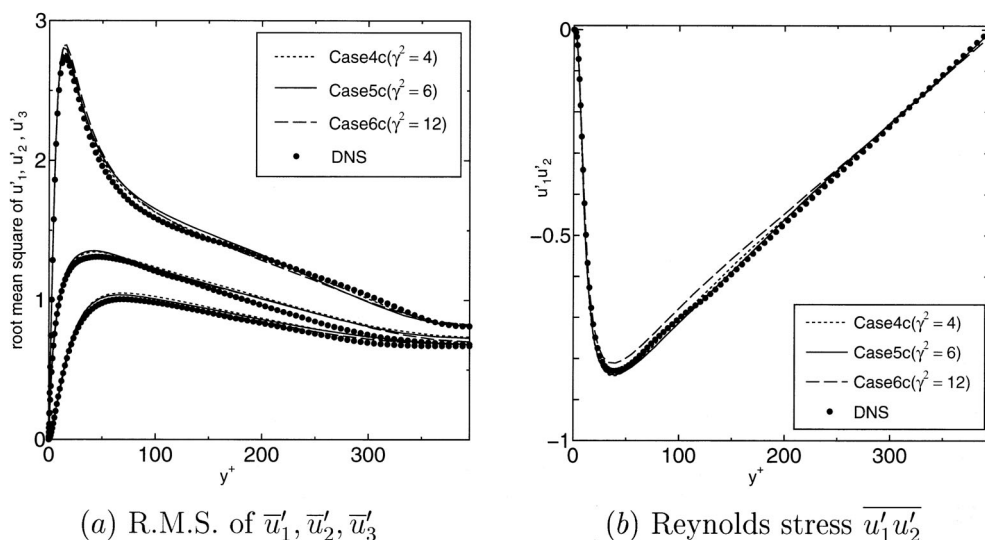


図 5: Distribution of turbulent stresses at $Re_\tau = 395$

表 2 に本計算で行った $Re_\tau = 395$, メッシュ分割 $96 \times 64 \times 96$ の Case5c で計算を行ったときのプロファイル情報を示す. 時間ステップは 100,000 である.

この表から, ベクトル化, 並列化が良好に行われていることが分かる.

4 まとめ

本研究では, 壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数, 180, 395 において Dynamic SGS モデルによるチャンネル乱流の LES を行った. 数値計算法は, 空間に関しては Galerkin 有限要素法を用いた. 特に対流項に対して保存型により離散化を行い, 質量行列には multi-pass アルゴリズムを用いた. 時間積分法には, 壁面による影響を強く受けるため, 壁面方向の物理粘性項には Crank-Nicolson 法による陰解法を適用した. その他は, 2次精度 Adams-Bashforth 法による陽解法, 圧力 Poisson 方程式には後退 Euler 法を適用した. Dynamic SGS モデルを用いた計算では, テストフィルタ幅をパラメータとする γ の検討を行ったが, 差分法で見られるほどの差異は生じなかったが, 乱流統計量のわずかな差異からみれば, 本計算では $\gamma = \sqrt{6}$ が妥当であると判断できた. その結果 $Re_\tau = 180, 395$ において, DNS データとの比較から, ほぼ DNS の結果に一致する高精度な解が得られた.

最後に, 本計算で行われた計算コストについて述べる. 離散化の高精度化・

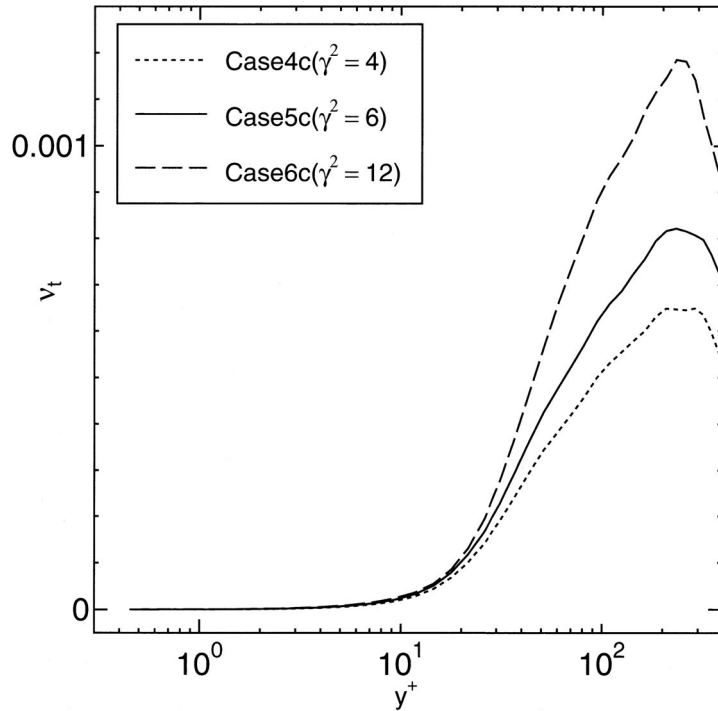


図 6: Distribution of eddy viscosity coefficient at $Re_\tau = 180$

問題の大規模化に伴ない、ベクトル型並列スーパーコンピュータの利用を意識した高速化及び並列化を行うため、大規模連立方程式の解法には、行列の格納方法にCDS形式に基づく行列ベクトル積を行った。連立方程式の解法にはCG法、BiCGstab法、BiCGStab2法、GPBiCG法、CR法を検討した結果、行列ベクトル積が反復中に一回しか行う必要の無い、CG法とCR法が最も高速に計算できたことで採用した。ただし各解法の前処理には、対角スケールリングを施している。その結果ベクトル化率は、(入出力を含めても)99.6%以上となり高速な計算が可能となった。しかし配列の間接参照の多い有限要素法の計算では、主要な計算において1.7Gflops~3.4Gflopsであり、全体で2Gflops程度の計算速度は、理論ピーク値の2割弱となっている。

それらを克服する意味での並列化も効果的で妥当な高速化が行えたため、大規模計算が可能となった。

Dynamic SGSモデルの使用に伴う計算時間の増加は、全計算中の2割を占めている。これはSmagorinskyモデルではほとんど計算コストが掛からないという点からも、計算負荷として無視できるものではない。有限要素法で

は、係数行列の組み立てとその重ね合わせに計算コストが掛かるためである。陰解法部分に占める連立方程式の解法部分は全計算時間の約 30%，multi-pass アルゴリズムに関わる計算は、約 10%を占めている。

謝辞: SX-7 を用いた計算の高速化・並列化については、東北大学情報シナジーセンター各位にご指導を頂きました。ここに記して感謝の意を示します。

参考文献

- [1] 森西 洋平, 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 1 報～第 3 報), 日本機械学会論文集 (B), **62**-604, 1996, 4090-4112.
- [2] Germano, M. *et al.*, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys Fluid*, **A3**-7, 1991, 1760-1764.
- [3] 大島まり, 小林敏雄, 谷口伸行, ラージ・エディ・シミュレーションの有限要素解析における運動量保存性の評価, 日本機械学会論文集 (B), **63**-610, 1997, 1955-1960
- [4] Moser, R. *et al.*, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$, *Phys Fluid*, **A11**-4, 1999, 943-945.
- [5] 長谷川 里美, 長谷川 秀彦, 藤野 清次 訳, 反復法 Templates, 朝倉書店, 1996.
- [6] G. R. Brozolo, M. Vitaletti : Conjugate gradient subroutines for the IBM 3090 Vector Facility, *IBM J. DEVELOP.*, Vol.33, No. 2, pp.125-135, 1989.

表2 Case5cでのプロファイル情報(16CPU)

```
***** Program Information *****
Real Time (sec)      :      35243.972897
User Time (sec)     :      550504.746534
Sys Time (sec)      :          1598.872193
Vector Time (sec)   :      464251.681921
Inst. Count         :      26278707972100.
V. Inst. Count      :      13975334920800.
V. Element Count    :      3539500928302341.
FLOP Count          :      1127072739955725.
MOPS                 :          6451.904954
MFLOPS              :          2047.344273
MOPS (concurrent)   :      100928.200744
MFLOPS (concurrent) :      32026.940141
VLEN                :          253.267700
V. Op. Ratio (%)    :          99.653602
Memory Size (MB)    :          5568.000000
Max Concurrent Proc. :              16.
  Conc. Time(>= 1)(sec):      35191.396212
  Conc. Time(>= 2)(sec):      34522.690229
  Conc. Time(>= 4)(sec):      34522.087985
  Conc. Time(>= 8)(sec):      34521.603923
  Conc. Time(>=16)(sec):      32241.592905
MIPS                 :          47.735661
I-Cache (sec)       :          1609.511702
O-Cache (sec)       :          8863.107170
Bank (sec)          :          7755.211868
```