［共同研究成果］

# 円管流・層流乱流遷移モデル(2)：チェイン・ルールと座標変換

神田 英貞
会津大学コンピュータ理工学部

## 1 はじめに: レイノルズの問題と曲線座標系での計算の必要性

本研究は、東北大学情報シナジーセンター、SENAC Vol. 38 No.4 [共同研究成果 : 円管流・層流乱流遷移モデル] の続きであり、ホスト方程式の曲線座標系への変換について述べる。計算結果は次回に続く。

物理の未解決問題に層流・乱流遷移がある。一般に、層流乱流遷移の臨界値 Rc の決定は流れの中の撹乱の成長、減衰を調べる問題として Orr-Sommerfeld 方程式による安定性理論により研究されている。流体力学の力は主に抵抗力とそれに垂直な揚力である。船や自動車の抵抗は船や自動車の形状により決定され、飛行機の揚力は翼の形状により決定される。レイノルズの実験装置をみると円管入口にラッパまたはベルマウスのようなものが乱れの撹乱を抑止する目的で取付けられている。

- ベルマウス形状 —> 流れの中の撹乱に影響—> Rc の決定　(一般)
- ベルマウス形状 —> 形状による未知の力に影響—> Rc の決定　(神田)

未知の力とは、流体力学で一般に考慮されていない力で壁面法線方向力である。私は、ベルマウスが無いとき Rc は最小になるとの仮定のもとに、実験値によく合致する円管流とチャネル流の最小臨界値を計算することに成功した [1-3]。この仮定を進めるために、いろいろな形状のベルマウスで実験を繰返し、Rc を求めている。実験値の Rc を次の計算目標とするためである。

さて、ベルマウス形状は一見単純であるが、Navier-Stokes の式、連続の式、ポアソン方程式等を直線座標系、円柱座標系で取扱うには境界処理が複雑になるため、曲線座標系への変換が必要となる。これらの方程式を物理空間 (現実の世界) でのホスト方程式と呼ぶ。物理空間での複雑な形状は、曲線座標系 $(\xi,\eta)$ の計算空間 (論理空間ともいう) では、図 1 にみるように、簡単な長方形の形状に変換される。しかし、ホスト方程式は物理空間では簡単であるが、計算空間では複雑になる。変換については、(i) ホスト方程式、 (ii) 計算領域の格子生成が必要であり、優れた解説書がある [4-5]。チェイン・ルールを使うと間違えずに変換が可能であり、本研究ではその紹介をする。

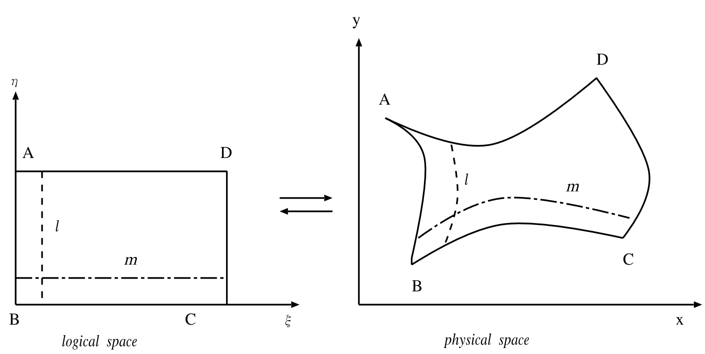
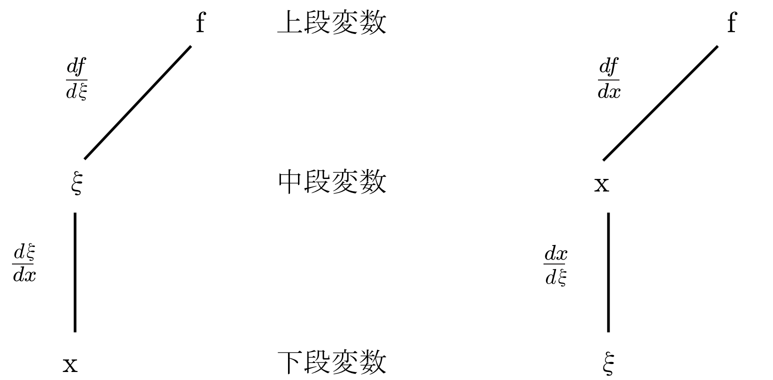



図 1 座標変換システム

## 2．１次元ホスト方程式の座標変換

(1) ホスト関数の１階微分
物理空間でのホスト関数 f の x 微分 $f_x$ を計算空間での微分 $f_\xi$ に変換する。すべての項が計算空間での変数 $\xi, \eta$ に関する微分で表現されている必要がある。座標変換にはチェイン・ルール (chain rule, 連鎖律) を利用する。

チェイン・ルール (1)　　　　チェイン・ルール (2)




(a)　チェイン・ルール (1)

$$f = f(\xi), \quad \xi = \xi(x), \quad f = f(\xi(x)) \tag{2.1}$$

式 (2.1) のように、$f$ は 変数 $\xi$ の関数で、$\xi$ は 変数 $x$ の関数とする。この場合、３つの変数 $f, \xi, x$ の上下関係を上図のチェイン・ルール (1) で表す。$f$ の下の変数は１個の $\xi$ のみであるから、$f$ と $\xi$ の微分関係は常微分 $df/d\xi$ で表記する。$f$ の $x$ 微分は、式 (2.2) で表される。

$$f_x \;=\; f_\xi \xi_x \tag{2.2}$$

式 (2.2) において、$\xi_x$ は物理空間での変数 x による微分であるから、このままでは計算空間で使用できない。

(b)　チェイン・ルール (2) 変数 $\xi, x$ の順序を入れ替えると、式 (2.3)、(2.4) の関係が得られる。

$$f = f(x), \quad x = x(\xi), \quad f = f(x(\xi)) \tag{2.3}$$

$$f_\xi \;=\; f_x x_\xi \tag{2.4}$$

式 (2.4) から、

$$f_x \;=\; x_\xi^{-1} f_\xi \tag{2.5}$$

式 (2.5) の $x_\xi$ は１次元ヤコビアン (Jacobian) $J$ である。

$$J \;=\; x_\xi \;=\; \left(\frac{dx}{d\xi}\right) \tag{2.6}$$

物理空間での関数の 1 階微分は、式 (2.5)、または (2.7) の右辺のように計算空間での式に変換される。

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{J}\frac{df}{d\xi} \tag{2.7}$$

(2) ホスト関数の 2 階微分
式 (2.7) の f に $f_x$ を代入する。

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{J}\frac{df}{d\xi}\right) = \frac{1}{J}\left\{\left(\frac{df}{d\xi}\right)\left(\frac{d}{d\xi}(\frac{1}{J})\right) + \frac{1}{J}\frac{d^2f}{d\xi^2}\right\} \tag{2.8}$$

ここで,

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{J}\right) = -\frac{1}{J^2}\frac{dJ}{d\xi} \tag{2.9}$$

式 (2.6) を $\xi$ で微分して、

$$\frac{dJ}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx}{d\xi}\right) = \frac{d^2x}{d\xi^2} \tag{2.10}$$

従って, 物理空間での関数の 2 階微分は、式 (2.11) の右辺のように計算空間での式に変換される。

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{J}\left\{\left(\frac{df}{d\xi}\right)\left(-\frac{1}{J^2}\frac{dJ}{d\xi}\right) + \frac{1}{J}\frac{d^2f}{d\xi^2}\right\} = \frac{1}{J^2}\frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{1}{J^3}\left(\frac{d^2x}{d\xi^2}\right)\left(\frac{df}{d\xi}\right) \tag{2.11}$$

## 3．２次元ホスト方程式の座標変換

(1) 1 階微分
(a) チェイン・ルール (3)、(図は次頁)

$$f = f(x,y), \quad x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta) \tag{3.1}$$

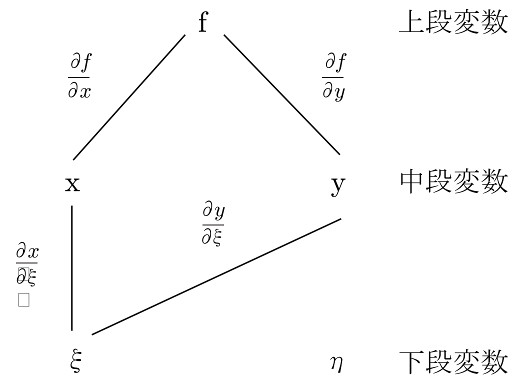
式 (3.1) のように、$f$ は 変数 $(x,y)$ の関数で、$(x,y)$ は 変数 $(\xi,\eta)$ の関数とする。この場合、3 つの変数の上下関係を図のチェイン・ルール (3a) で表す。$f$ の下の変数は 2 個の $(x,y)$ であるから、$f$ と $(x,y)$ の微分関係は偏微分 $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ で表記する。以下同様。チェイン・ルール (3a), (3b) は、式 (3.2) で表される。

$$f_\xi = f_x x_\xi + f_y y_\xi, \qquad f_\eta = f_x x_\eta + f_y y_\eta \tag{3.2}$$

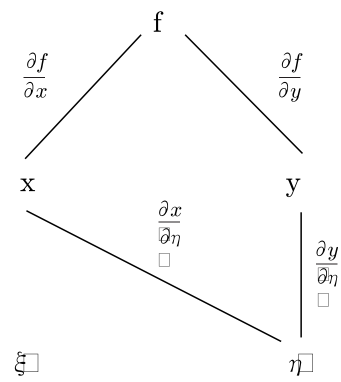
式 (3.2) の 2 式をまとめて 1 つの行列で表記すると、

$$\begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

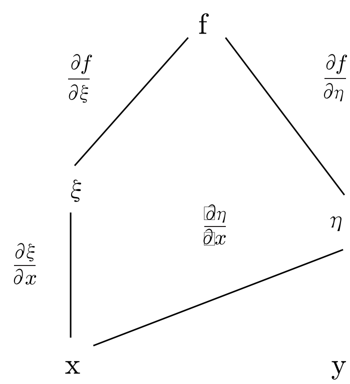
チェイン・ルール (3a)



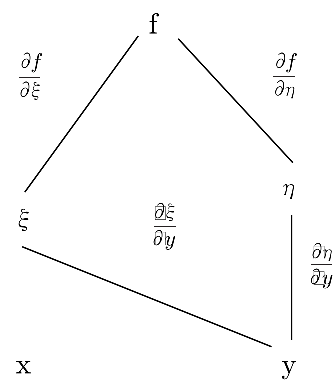

チェイン・ルール (3b)




チェイン・ルール (4a)




チェイン・ルール (4b)




式 (3.3) の右辺第 1 項は 2 次元ヤコビアン行列である。

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

物理空間での式が計算空間ではどのように変換されるかを求めるのが目的であるから、式 (3.3) の両辺に逆ヤコビアン行列を掛けて、

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{det(J)} \begin{pmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ここで、$det(J)$ は

$$det(J) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \tag{3.6}$$

式 (3.5) の右辺の各項は $\xi,\eta$ の微分項であるから、そのまま $f_x, f_y$ の計算空間での変換式として使用可能である。(3.5) から、

$$f_x \;=\; \frac{1}{det(J)}(\; y_\eta\; f_\xi \;-\; y_\xi\; f_\eta\;), \quad f_y \;=\; \frac{1}{det(J)}(\; -x_\eta f_\xi \;+\; x_\xi\; f_\eta\;) \tag{3.7}$$

(b)　チェイン・ルール (4)

チェイン・ルール (4a), (4b) の変数の上下関係は式 (3.8) であり、微分関係は式 (3.9) で表される。式 (3.9) の 2 式を行列で表記すると (3.10) となる。

$$f = f(\xi,\eta), \quad \xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \tag{3.8}$$

$$f_x \;=\; f_\xi\,\xi_x \;+\; f_\eta\,\eta_x, \qquad f_y \;=\; f_\xi\;\xi_y \;+\; f_\eta\;\eta_y \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

式 (3.10) の右辺第 1 項は 2 次元逆ヤコビアン行列である。

$$J^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$JJ^{-1} \;=\; I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

逆ヤコビアン行列 (3.11) には、$\xi,\eta$ の $x, y$ 微分項があるため、このままでは計算空間では使用できない。ただし、式 (3.5) と (3.10) から、重要な逆変換のメトリック関係 (3.13) を得る。

$$\xi_x \;=\; \frac{y_\eta}{det(J)}, \quad \eta_x \;=\; -\frac{y_\xi}{det(J)}, \quad \xi_y \;=\; -\frac{x_\eta}{det(J)}, \quad \eta_y \;=\; \frac{x_\xi}{det(J)} \tag{3.13}$$

(2) ホスト関数の 2 階微分

1 次元のときと同様、式 (3.7) の $f$ に $f_x$，$f_y$ を代入する。2 階微分は次のように表される。式 (3.14)-(3.16) には、$f_x, f_y$ が含まれるため、再度 (3.7) を式 (3.14)-(3.16) に代入し、全ての項が $\xi,\eta$ の微分項になるように整理する。ここでは式の展開が煩雑になるため、$det(J)$ を $J$ と略記する。

$$f_{xx} \;=\; \frac{1}{J}\left\{ y_\eta\;(f_x)_\xi \;-\; y_\xi\;(f_x)_\eta \right\} \tag{3.14}$$

$$f_{xy} \;=\; \frac{1}{J}\left\{ y_\eta\;(f_y)_\xi \;-\; y_\xi\;(f_y)_\eta \right\} \tag{3.15}$$

$$f_{yy} \;=\; \frac{1}{J}\left\{ -x_\eta (f_y)_\xi \;+\; x_\xi\;(f_y)_\eta \right\} \tag{3.16}$$

(a) $f_{xx}$ の展開

(i) $f_{x\xi}$

$$f_{x\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi} f_x = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta}{J}\right) = \frac{1}{J^2}\left\{J\frac{\partial}{\partial\xi}(y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) - (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)\frac{\partial J}{\partial\xi}\right\}$$

$$= \frac{1}{J}(y_{\xi\eta} f_\xi + y_\eta f_{\xi\xi} - y_{\xi\xi} f_\eta - y_\xi f_{\xi\eta}) - \frac{1}{J} f_x \frac{\partial J}{\partial\xi} \tag{3.17}$$

ここで、

$$\frac{\partial J}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi} \tag{3.18}$$

同様に、

$$\frac{\partial J}{\partial\eta} = x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta} \tag{3.19}$$

式 (3.17)、(3.18) から、

$$f_{x\xi} = \frac{1}{J}(y_{\xi\eta} f_\xi + y_\eta f_{\xi\xi} - y_{\xi\xi} f_\eta - y_\xi f_{\xi\eta}) - \frac{1}{J} f_x (x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_{\eta\xi} - x_\eta y_{\xi\xi}) \tag{3.20}$$

(ii) $f_{x\eta}$

$$f_{x\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} f_x = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta}{J}\right) = \frac{1}{J^2}\left\{J\frac{\partial}{\partial\eta}(y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) - (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)\frac{\partial J}{\partial\eta}\right\} \tag{3.21}$$

式 (3.19) を (3.21) に代入して、

$$f_{x\eta} = \frac{1}{J}(y_{\eta\eta} f_\xi + y_\eta f_{\xi\eta} - y_{\xi\eta} f_\eta - y_\xi f_{\eta\eta}) - \frac{1}{J} f_x (x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}) \tag{3.22}$$

(iii) $Jf_{xx}$

式 (3.14), (3.20), (3.22) から

$$Jf_{xx} = y_\eta\left\{\frac{1}{J}(\underset{7}{y_{\xi\eta} f_\xi} + \underset{1}{y_\eta f_{\xi\xi}} - \underset{5}{y_{\xi\xi} f_\eta} - \underset{2}{y_\xi f_{\eta\xi}}) - \frac{1}{J} f_x (\underset{13}{x_{\xi\xi} y_\eta} + \underset{8}{x_\xi y_{\xi\eta}} - \underset{14}{x_{\xi\eta} y_\xi} - \underset{6}{x_\eta y_{\xi\xi}})\right\}$$

$$- y_\xi\left\{\frac{1}{J}(\underset{11}{y_{\eta\eta} f_\xi} + \underset{3}{y_\eta f_{\xi\eta}} - \underset{9}{y_{\xi\eta} f_\eta} - \underset{4}{y_\xi f_{\eta\eta}}) - \frac{1}{J} f_x (\underset{15}{x_{\xi\eta} y_\eta} + \underset{12}{x_\xi y_{\eta\eta}} - \underset{16}{x_{\eta\eta} y_\xi} - \underset{10}{x_\eta y_{\xi\eta}})\right\}$$

$$= \frac{1}{J}\left\{ y_\eta^2 f_{\xi\xi} - ( y_\eta y_\xi f_{\xi\eta} + y_\eta y_\xi f_{\xi\eta} ) + y_\xi^2 f_{\eta\eta} \right\} \tag{3.23a}$$

1 2 3 4

$$+ \frac{1}{J} y_{\xi\xi}( -y_\eta f_\eta + f_x x_\eta y_\eta ) \tag{3.23b}$$

5 6

$$\frac{1}{J} y_{\xi\eta}( y_\eta f_\xi - f_x x_\xi y_\eta + y_\xi f_\eta - f_x x_\eta y_\xi ) \tag{3.23c}$$

7 8 9 10

$$+ \frac{1}{J} y_{\eta\eta}( -y_\xi f_\xi + f_x x_\xi y_\xi ) \tag{3.23d}$$

11 12

$$+ \frac{1}{J} x_{\xi\xi}( -f_x y_\eta^2 ) \tag{3.23e}$$

13

$$+ \frac{1}{J} x_{\xi\eta}( f_x y_\xi y_\eta + f_x y_\eta y_\xi ) \tag{3.23f}$$

14 15

$$+ \frac{1}{J} x_{\eta\eta}( -f_x y_\xi^2 ) \tag{3.23g}$$

16

チェイン・ルール (3) の (3.2) 式を使って

$$(3.23b) = y_\eta( -f_\eta + f_x x_\eta ) = -y_\eta^2 f_y \tag{3.24b}$$

$$\begin{aligned}(3.23c) &= y_\eta( f_\xi - f_x x_\xi ) + y_\xi( f_\eta - f_x x_\eta ) \\ &= y_\eta f_y y_\xi + y_\xi f_y y_\eta = 2 y_\xi y_\eta f_y\end{aligned} \tag{3.24c}$$

$$(3.23d) = y_\xi( -f_\xi + f_x x_\xi ) = -y_\xi f_y y_\xi = -y_\xi^2 f_y \tag{3.24d}$$

式 (3.23)、(3.24) から $f_{xx}$ を得る。

$$f_{xx} = \frac{1}{J^2}( y_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta f_{\xi\eta} + y_\xi^2 f_{\eta\eta} )$$

$$+ \frac{1}{J^3}( y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta} )( -J f_y )$$

$$+ \frac{1}{J^3}( y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} )( -J f_x ) \tag{3.25}$$

ここで、式 (3.7) から

$$-J f_y = x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta, \qquad -J f_x = y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi \tag{3.26}$$

最後に (3.26) を (3.25) に代入して、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{1}{J^2}( y_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta f_{\xi\eta} + y_\xi^2 f_{\eta\eta} ) \\ &+ \frac{1}{J^3}( y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta} )( x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta ) \\ &+ \frac{1}{J^3}( y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2 y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} )( y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi ) \end{aligned} \tag{3.27}$$

同様に展開して、$f_{xy}$, $f_{yy}$ を得る。

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{1}{J^2}\left\{ (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) f_{\xi\eta} - x_\xi y_\eta f_{\eta\eta} - x_\eta y_\eta f_{\xi\xi} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{J^2}( x_\xi y_{\eta\eta} - x_\eta y_{\xi\eta} ) + \frac{1}{J^3}( x_\eta y_\eta J_\xi - x_\xi y_\eta J_\eta ) \right\} f_\xi \\ &+ \left\{ \frac{1}{J^2}( x_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\eta} ) + \frac{1}{J^3}( x_\xi y_\xi J_\eta - x_\eta y_\xi J_\xi ) \right\} f_\eta \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \frac{1}{J^2}( x_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2 x_\xi x_\eta f_{\xi\eta} + x_\xi^2 f_{\eta\eta} ) \\ &+ \frac{1}{J^3}( x_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2 x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta} )(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ &+ \frac{1}{J^3}( x_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2 x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta} )(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) \end{aligned} \tag{3.29}$$

## 4　ベルマウス内でのホスト方程式の計算空間への変換

ホスト方程式は、2 次元円柱座標系 (x, r) での (i) 渦度輸送方程式、(ii) 流れ関数のポアソン方程式、(iii) 定常状態の Navier-Stokes 方程式、(iv) 圧力のポアソン方程式である。(東北大学情報シナジーセンター、SENAC Vol. 38 No.4 [共同研究成果：円管流・層流乱流遷移モデル] 参照)

(1)　1 階微分項の変換物理空間での円柱座標系 $(x, r)$ から計算空間での曲線座標系 $(\xi, \eta)$ に変換する。

$$f = f(x, r), \qquad x = x(\xi, \eta), \qquad r = r(\xi, \eta) \tag{4.1}$$

チェイン・ルール (3a) と同一であるから、式 (3.5) の y を r に変えて、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial r} \end{pmatrix} = \frac{1}{det(J)} \begin{pmatrix} r_\eta & -r_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

ここで、$det(J) = x_\xi r_\eta - x_\eta r_\xi$。

(2)　2 階微分項の変換

式 (3.27), (3.29) の y を r に変えると、各々の 2 階微分項 (4.3)、 (4.4) を得ることができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{J}[r_\eta (f_x)_\xi - r_\xi (f_x)_\eta] = \frac{1}{J}\{r_\eta[(r_\eta f_\xi - r_\xi f_\eta)/J]_\xi - r_\xi[(r_\eta f_\xi - r_\xi f_\eta)/J]_\eta\} \\ &= \frac{1}{J^2}(r_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2r_\xi r_\eta f_{\xi\eta} + r_\xi^2 f_{\eta\eta}) + \frac{1}{J^3}\{(r_\eta^2 r_{\xi\xi} - 2r_\xi r_\eta f_{\xi\eta} + r_\xi^2 r_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ &\quad + (r_\eta^2 r_{\xi\xi} - 2r_\xi r_\eta x_{\xi\eta} + r_\xi^2 x_{\eta\eta})(r_\xi f_\eta - r_\eta f_\xi)\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{J}[-x_\eta (f_r)_\xi + x_\xi (f_r)_\eta]$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{J^2}(x_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta f_{\xi\eta} + x_\xi^2 f_{\eta\eta}) + \frac{1}{J^3}\{(x_\eta^2 r_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta r_{\eta\eta} + x_\xi^2 r_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ &\quad + (x_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta})(r_\xi f_\eta - r_\eta f_\xi)\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

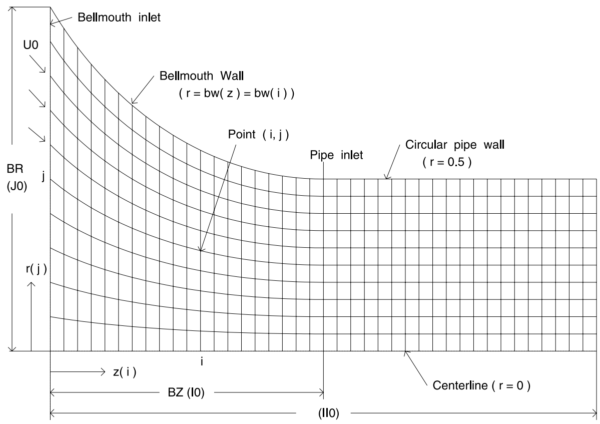



図 2　ベルマウス内の代数型格子システム

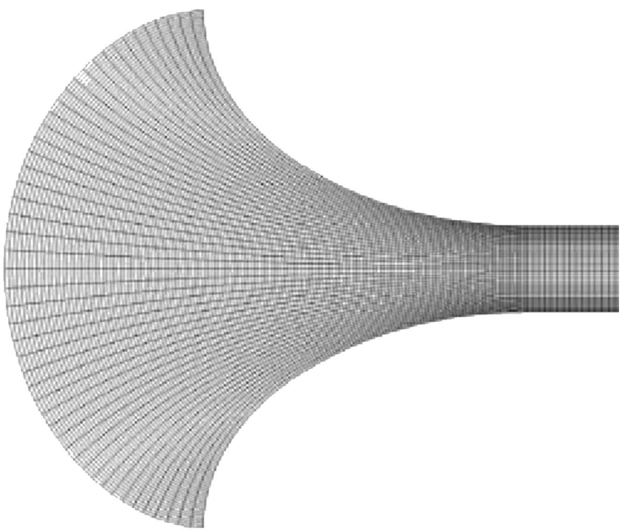


図 3　ベルマウス内の双曲型格子システム

(3) 格子システムの問題点

格子生成法には、代数型格子生成法、楕円型格子生成法、双曲型格子生成法等がある。図２に代数型格子システム、図３に双曲型格子システム [6] の例を示す。図２、３の格子システムは明らかに入口境界の形が異なっている。どちらの格子が真実の流れを表すのに適しているのだろうか。ホスト方程式の (4.2),(4.3),(4.4) による変換方程式を格子システム上で計算するのだが、次の重要な問題点が残されている。

- ベルマウス入口での境界値をどのように設定するか
- 計算結果の評価をどのようにするか

## 6 おわりに

ベルマウス内の流れ場の計算を現在行っている。計算に先立ち、物理空間から計算空間へのホスト方程式の変換に苦労した。本研究では 2 次元であるが、分かりやすく、間違えない変換方法をチェイン・ルールをもとに記述した。

今後の研究課題は、(i) Rc の計算と層流乱流遷移問題の継続、(ii) 3 次元曲線座標系での計算のために、微分幾何、ベクトル、テンソルの理解が、中心となるだろう。特にテンソルは定義、数式が複雑なため簡単な説明方法が望まれる。

## 謝辞

東北大学・情報シナジーセンターの皆様にはいつもながら誠にお世話になりました。

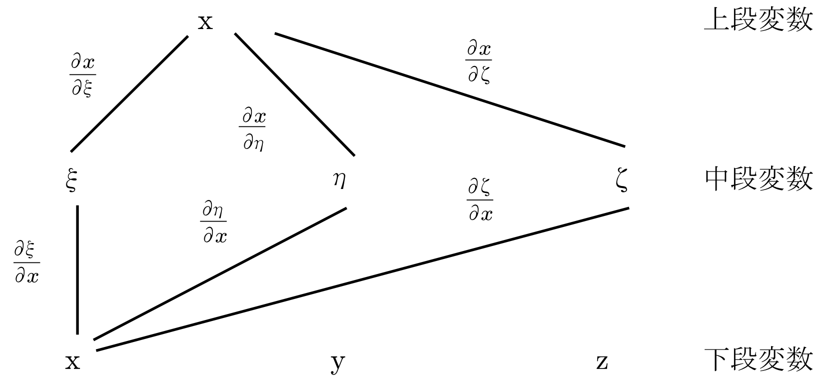
## 参考文献

[1] Kanda, H., 1999, Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flows. Part 1. Experimental Definition of the Problem, Proc of ASME Fluids Engineering Division-1999, ASME FED-Vol. 250, pp. 189-196.
[2] Kanda, H., 1999, Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flows. Part 2. Calculation of the Minimum Critical Reynolds Number, Proc of ASME Fluids Engineering Division-1999, ASME FED-Vol. 250, pp. 197-204.
[3] Kanda, H., 2006, Laminar-Turbulent Transition: Calculation of Minimum Critical Reynolds Number in Channel Flow, 京都大学数理解析研究所講究録別冊第 1 号, pp. 177-195.
[4] 高見穎郎・河村哲也、1999, 偏微分方程式の差分解法、東京大学出版会.
[5] Knupp, P., and Steinberg, S., 1993, Fundamentals of GRID GENERATION, CRC Press.
[6] Kitamura, T., March, 2005, Grid Generation in Bellmouth Region with Hyperbolic Partial Differential Equation, University of Aizu, Graduation Thesis.
[7] 杉原厚吉、1995, グラフィックスの数理、共立出版.

## 付録.　3 次元ヤコビアン行列

ここではホスト方程式を考えず、座標変換のみを考える。チェイン・ルールに慣れるため、上段変数に座標変数 x をもちい、3 次元のヤコビアン行列を求める。

チェイン・ルール (5)




(1) 3 次元ヤコビアン行列 (立体) とチェイン・ルール (5)
3 次元物理空間の座標 X は、

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ベクトルは (5.1) のように縦型で考えると良い (説明略)。3 次元計算空間からみた X は、

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \tag{5.2}$$

また、物理空間からみた計算空間の座標は、

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z) \tag{5.3}$$

式 (5.3) を (5.2) に取込むと、

$$x = x(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)), \quad y = y(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)),$$

$$z = z(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)) \tag{5.4}$$

式 (5.4) の上下関係がチェイン・ルール (5) である。上段変数 x の下段変数 (x, y, z) による微分関係は、中段変数 ($\xi, \eta, \zeta$) を介して、

$$x_x = x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x + x_\zeta \zeta_x \tag{5.5$a$}$$

$$x_y = x_\xi \xi_y + x_\eta \eta_y + x_\zeta \zeta_y \tag{5.5$b$}$$

$$x_z = x_\xi \xi_z + x_\eta \eta_z + x_\zeta \zeta_z \tag{5.5$c$}$$

式 (5.5a, 5.5b, 5.5c) を行列で表記すると式 (5.6) となる。ここで、(x, y, z) は互いに直交した座標系であるから、$x_x = 1, x_y = 0, x_z = 0$ である。

$$\begin{pmatrix} x_x \\ x_y \\ x_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\xi \\ x_\eta \\ x_\zeta \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

行列 (5.6) を転置する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

同様に、y, z を上段変数とすると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\xi & y_\eta & y_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

式 (5.7), (5.8), (5.9) を重ねて 1 つの行列で表記すると、3 次元ヤコビアン $J$ 行列、逆ヤコビアン $J^{-1}$ 行列が得られる。

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

ここで、

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

または、

$$J^{-1} = \frac{1}{det(J)} \begin{pmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & x_\zeta z_\xi - x_\xi y_\zeta \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$JJ^{-1} = I \tag{5.14}$$

(2) ヤコビアン行列のベクトル表示
ヤコビアン行列と逆ヤコビアン行列のベクトル表示は (5.11)、(5.12) から、

$$J = (X_\xi, X_\eta, X_\zeta) \tag{5.15}$$

$$J^{-1} = (\nabla_X \xi\,, \nabla_X \eta\,, \nabla_X \zeta)^t \tag{5.16}$$

(5.13), (5.16) から

$$\nabla_X \xi = \frac{1}{det(J)} X_\eta \times X_\zeta, \qquad \nabla_X \eta = \frac{1}{det(J)} X_\zeta \times X_\xi, \qquad \nabla_X \zeta = \frac{1}{det(J)} X_\xi \times X_\eta \tag{5.17}$$

以上において、

- $|X_\xi|$, $|X_\eta|$, $|X_\zeta|$ は物理空間と計算空間での” 長さ” の比を示す。
- $|X_\eta \times X_\zeta|$, $|X_\zeta \times X_\xi|$, $|X_\xi \times X_\eta|$ は物理空間と計算空間での” 面積” の比を示す。
- 3 次元 $J$ は物理空間と計算空間での” 体積” の比を示す。

(5.17) で使われているベクトルは微分幾何では重要な役割をはたし特別な名前を持っている。しかし、反変ベクトルと共変ベクトルの名前はベクトル・テンソルの本でも誤解が多く、反対に定義されているかどちらか不明の例が多い [5]。ここでは、杉原先生の本が正しく、その定義に従う [7]。

- $X_\xi, X_\eta, X_\zeta$: 反変ベクトル (contravariant normal vectors)
- $\nabla_X \xi\,, \nabla_X \eta\,, \nabla_X \zeta$: 共変ベクトル (covariant tangent vectors)

(3) 3 次元ヤコビアン行列 (曲線)
3 次元曲線は 1 個のパラメータ $\xi$ で (5.18) のように表記できる。

$$X(\xi) = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \\ z(\xi) \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

この場合のヤコビアン行列は (5.19) となる。

$$J = X_\xi = \begin{pmatrix} x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

曲線の長さ $L$ は、(5.20) で求めることができる。

$$L = \int |X_\xi(\xi)| d\xi \tag{5.20}$$

(4) 3 次元ヤコビアン行列 (曲面)
3 次元曲面は 2 個のパラメータで (5.21) のように表記され、3 次元曲面のヤコビアン行列は (5.22) となる。

$$X = X(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \\ z(\xi,\eta) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

$$J = (X_\xi,\ X_\eta) = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

曲面の面積 $A$ は (5.23)、または、(5.24) で求めることができる。

$$A = \iint |X_\xi \times X_\eta|\, d\xi d\eta \tag{5.23}$$

$$A = \iint \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, d\xi d\eta \tag{5.24}$$

ここで、

$$J_1 = det \begin{pmatrix} y_\xi & y_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{pmatrix}, \quad J_2 = det \begin{pmatrix} z_\xi & z_\eta \\ x_\xi & x_\eta \end{pmatrix}, \quad J_3 = det \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \tag{5.25}$$