

スペクトル・エレメント法による矩形ダクト内の

3次元熱流動数値シミュレーション

足立 高弘 長谷川 省吾¹ 田代 大和

秋田大学工学資源学部機械工学科

1 はじめに

多くの工学分野において、熱交換器の伝熱促進技術の開発が望まれている。現在、安価で高効率な熱交換器として、プレート式熱交換器がある。プレート式熱交換器では、省スペース、省資源、省エネルギー、低騒音などの要求から流速や代表寸法が小さくなり低レイノルズ数化する傾向にある。そこで、層流域における伝熱促進法の研究が重要となる。

このプレート式熱交換器の伝熱性能を向上させる代表的な手法の一つとして、乱れ促進体を用いる方法がある。すなわち、流れ方向に周期的に障害物を設置したり凹凸を設けることで、流れの剥離や自励振動を誘起し、温度境界層の発達を抑制されて熱伝達が促進されることが知られており、実験的にも数値的にも広く研究が行われている。例えば、平行平板間流路伝熱面の片面あるいは両面に周期的に矩形 [1]-[4] や、正三角形 [5]、台形 [6] の凹凸を設け、断面形状を流れ方向に周期的に変化させたり、フィン [7] を配置した場合についての熱流動特性に関する研究がある。このような流路を流体が通過する場合には、レイノルズ数の増加に伴い、流れの状態が2次元定常流、2次元非定常振動流そして3次元非定常流に遷移することが確認されている。それに伴い熱伝達も促進される。この流れのパターンと伝熱特性は幾何形状とレイノルズ数により変化する。しかし、多くの幾何形状について実験的に熱伝達を求めることは時間的、経済的コストが大きな負担となり困難である。また、流れが3次元の場合には実験的に流れの構造や熱伝達を求めることがさらに困難となる。

そこで、本研究では、プレート式熱交換器のモデルとして平行平板の両側に上下対称に、周期的な矩形溝（凹部）を設けた流路に着目し、コンピューターを用いた3次元直接数値シミュレーションを行う。本報では高精度な数値解法であるスペクトル・エレメント法・フーリエ・スペクトル法の原理を紹介し、東北大学情報シナジーセンターのスーパーコンピューター SX-7 を用いて行った計算結果の一例を示す。

¹現在は、矢崎総業株式会社に勤務。

2 問題の定式化

図 1(a) に平行平板に周期的な凹部（拡大溝）を設けた流路を示す．ここでは，流れが十分発達しており流路と同じ周期を持つ特別な場合を仮定する．そこで，図 1(b) に示すように流路の 1 周期分を取り上げる．図に示すように，流路は幅 $2h^*$ の平板に流れ方向に周期的かつ中心線に関して対称な凹部（拡大溝）を持つ流路である．流れ方向を x^* 軸，流れに垂直方向を y^* 軸，奥行き方向を z^* 軸とし，それぞれの方向の速度を u^*, v^*, w^* とする．

この流路の形状を決める無次元数として，流路の周期 L ，凹部の溝幅 l および平行平板の中心線から上下凹部までの溝高さ a および奥行き方向幅 W を次式で定義する．

$$L = L^*/h^*, \quad l = l^*/h^*, \quad a = a^*/h^*, \quad W = W^*/h^*. \quad (1)$$

ただし，代表長さとして平行平板間流路の半値幅 h^* を用いる．また，アスタリスク $*$ の付いた物理量は次元を有することを表す．なお， $a = 1$ の場合には平行平板間流路となる．

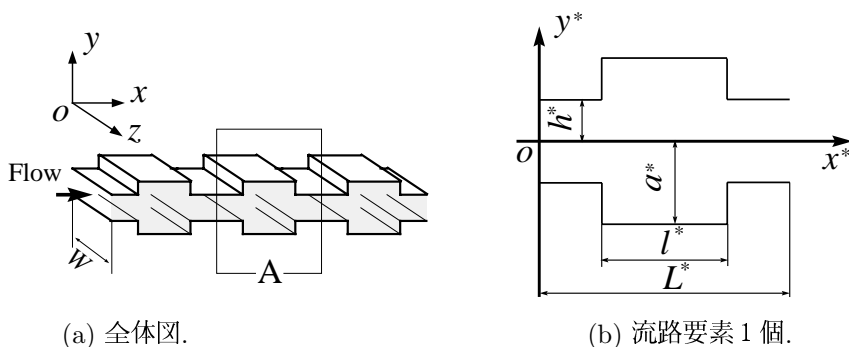


図 1: 物理モデルと座標系.

流路内の流れは 3 次元非圧縮粘性流体とする．このとき，流れの基礎方程式は，連続の式およびナビエ・ストークス方程式で次式のようにになる．

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \quad (3)$$

ただし， $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ， $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ である．上式では，次式のように物理量の無次元化を行っている．

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{h^*}, \quad t = \frac{t^* U^*}{h^*}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho^* U^{*2}}. \quad (4)$$

ここで、代表速度 U^* は流路高さ $2h^*$ の位置における平均流速 U_m^* を用いて次式で定義される。

$$U^* = \frac{3}{2}U_m^*. \quad (5)$$

また、レイノルズ数 Re は次式で定義される。

$$Re = \frac{U^*h^*}{\nu^*}. \quad (6)$$

境界条件は、壁面で速度ゼロおよび流路出入口で周期境界条件が成り立つとして、上下壁面において $\mathbf{u} = 0$ および流路 1 周期の入り口と出口において

$$\mathbf{u}(x + L, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (7)$$

とする。また、奥行き方向についても、流路幅 W の間隔と同じ周期をもった十分発達した状態であるとし

$$\mathbf{u}(x, y, z + W, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (8)$$

とする。一方、圧力に関しては次式のように流路 1 周期について周期的な項とそうでない項の分離を行い、

$$p = -\beta x + \tilde{p}, \quad \tilde{p}(x + L, y, z, t) = \tilde{p}(x, y, z, t), \quad (9)$$

$$\tilde{p}(x, y, z + W, t) = \tilde{p}(x, y, z, t) \quad (10)$$

とする。ここで、 $\beta = \beta(t)$ は流れを駆動する圧力勾配であり、流路内流量一定の条件

$$\int_0^W \int_{-1}^1 u_{(x=0)} dy dz = \frac{4}{3}W \quad (11)$$

から求められる。

3 計算方法

本報で行う数値計算では、時間変数に関する離散化に SMAC 法をベースとした定式化を行う。また、空間変数に関する離散化には、流れ方向及び壁方向にスペクトル・エレメント法、奥行き方向にフーリエ・スペクトル法を用いて解析を行う。スペクトル法は、対象となる微分方程式の解を、既知の関数で展開し、その展開係数を求める作業に帰着させる方法であり、有限要素法の計算方法と類似している。ただし、有限要素法では幾何形状が複雑な領域でも計算可能だが一般に計算の精度が低いのに対し、スペクトル法は幾何形状が複雑な領域で用いるのは困難な反面一般に計算精度は高いという特徴がある。スペクトル・エレメント法はスペクトル法の高い計算精度と有限

要素法の柔軟な領域分割特性や、境界条件の取り扱い安さを併せ持つ計算方法である。したがって、これらの2つの長所を併せ持つスペクトル・エレメント法は、複雑な境界条件を持つ問題を、高精度に取り扱う場合に適用され効果を発揮する方法である。さらに、奥行き方向に流れが周期的であると仮定しており、奥行き方向には代表的な長さスケールが存在しないことから、フーリエ・スペクトル法を適用することで、3次元流を2次元流の波数ごとの重ね合わせで表現することができ、計算量と記憶域を大幅に節約することができる。

式 (9) を用いて連続の式とナビエ・ストークス方程式を改めてベクトル系で記述すると次式のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(\beta x) - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{u} , \tilde{p} について奥行き方向に次のようにフーリエ級数展開する。

$$\mathbf{u} = \sum_{p=-N}^N \mathbf{u}_p e^{ip\alpha z}, \quad \mathbf{u}_{-p} = \mathbf{u}_p^\dagger. \quad (14)$$

$$\tilde{p} = \sum_{p=-N}^N \tilde{p}_p e^{ip\alpha z}, \quad \tilde{p}_{-p} = \tilde{p}_p^\dagger. \quad (15)$$

上式の \dagger は複素共役を意味する。また、 α は奥行き方向の波数であり次式により定義される。

$$\alpha = \frac{2\pi}{W}. \quad (16)$$

展開式 (14), (15) を式 (12), (13) に代入すると、ひとつのフーリエモード p について次のようになる。

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_p = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \sum_{q=-N}^N (\mathbf{u}_q \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{u}_{p-q} = \nabla(\beta \delta_{0,p} x) - \tilde{\nabla} \tilde{p}_p + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \mathbf{u}_p. \quad (18)$$

ただし、 $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, ip\alpha)$, $\tilde{\Delta} = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 - p^2\alpha^2)$ である。ここで $\delta_{0,p}$ はクロネッカーのデルタであり、圧力勾配 β が $p = 0$ のモードでのみ存在することを表している。また、非線形項から

$$\sum_{q=-N}^N (\mathbf{u}_q \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{u}_{p-q} \quad (19)$$

のような積和部分が出てくるが、これは離散畳み込みとなっている。そこで $\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{p-q}$, \mathbf{u}_q それぞれのフーリエ変換を求め、その積を求めてから逆フーリエ変換をすること

で式 (19) の積和が求まる。フーリエ変換に高速フーリエ変換ライブラリを用いることで演算量は少なくなり高速解法が可能となる。

式 (18) の移流項と粘性項については3次のアダムス・パッシュフォース法、圧力項 \tilde{p} と β については1次の陰解法を用いて離散化する。時刻 k における既知の速度 \mathbf{u}_p^k 及び既知の圧力関数 \tilde{p}_p^k と β^k を用いて、時刻 $(k+1)$ における速度 \mathbf{u}_p^{k+1} 及び圧力についての周期関数 \tilde{p}_p^{k+1} と β^{k+1} を表すと、

$$\frac{\mathbf{u}_p^{k+1} - \mathbf{u}_p^k}{\Delta t} = -\nabla \tilde{p}_p^{k+1} + \frac{23\mathbf{A}\mathbf{u}_p^k - 16\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-1} + 5\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-2}}{12} + \nabla(\beta^{k+1}\delta_{0,p}x) \quad (20)$$

と書ける。ただし、

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_p^k = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}_p^k - \sum_{q=-N}^N (\mathbf{u}_q^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_{p-q}^k. \quad (21)$$

これに SMAC 法を用いた2段分離を適用すると、

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p^k}{\Delta t} = -\nabla \tilde{p}_p^k + \frac{23\mathbf{A}\mathbf{u}_p^k - 16\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-1} + 5\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-2}}{12}, \quad (22)$$

$$\frac{\mathbf{u}_p^{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_p}{\Delta t} = -\nabla (\tilde{p}_p^{k+1} - \tilde{p}_p^k) + \nabla(\beta^{k+1}\delta_{0,p}x) \quad (23)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{u}}_p$ は速度の予測である。また、速度ポテンシャル ϕ_p を次式のように定義する。

$$\nabla \phi_p = \mathbf{u}_p^{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_p - \Delta t \nabla \beta \delta_{0,p} x. \quad (24)$$

式 (24) の両辺に $\nabla \cdot$ をとると、連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u}_p^{(k+1)} = 0$ を満たすように定義された ϕ_p に関するポアソン方程式

$$\Delta \phi_p = \nabla \cdot \mathbf{u}_p^{k+1} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_p = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_p \quad (25)$$

が得られる。壁面での ϕ_p の境界条件は、自然境界条件 ($\partial \phi_p / \partial n = 0$) とする。

解法の手順としては、次の STEP1~STEP4 で表現される。

$$\text{STEP1} \quad \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{u}_p^k + \Delta t \left(-\nabla \tilde{p}_p^k + \frac{23\mathbf{A}\mathbf{u}_p^k - 16\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-1} + 5\mathbf{A}\mathbf{u}_p^{k-2}}{12} \right). \quad (26)$$

$$\text{STEP2} \quad \Delta \phi_p = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_p. \quad (27)$$

$$\text{STEP3} \quad \mathbf{u}_p^{k+1} - \Delta t \nabla \beta^{k+1} \delta_{0,p} x = \hat{\mathbf{u}}_p + \nabla \phi_p. \quad (28)$$

$$\text{STEP4} \quad \tilde{p}_p^{k+1} = \tilde{p}_p^k - \frac{\phi_p}{\Delta t}. \quad (29)$$

まず、STEP1 では既知の速度 \mathbf{u}_p^k および圧力についての周期関数 \tilde{p}_p^k を用いて、速度の予測である $\hat{\mathbf{u}}_p$ を求める。STEP2 では $\hat{\mathbf{u}}_p$ を使用し、速度ポテンシャル ϕ_p を求め

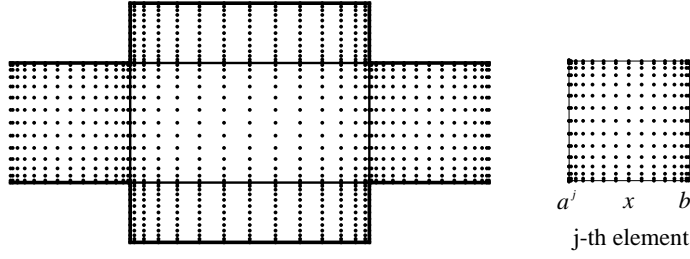


図 2: スペクトル要素とガウス・ルジャンドル・ロバット点, $M = 14$ の場合.

る. STEP3では \hat{u}_p および ϕ_p を用いて時刻 $(k+1)$ における速度 \mathbf{u}_p^{k+1} を決定する. β^{k+1} については流量一定条件より求める. 最後に, \hat{p}_p^k と ϕ_p から時刻 $(k+1)$ の \hat{p}_p^{k+1} を求める.

さらに, 式 (25)~(29) を解く場合に流れ方向および壁方向にはスペクトル・エレメント法を用いる. スペクトル・エレメント法では, 図 2 に示すように計算領域をいくつかの矩形要素に分割する. 本研究では, 図に実線で示すように 5 個の矩形領域に分割する. そして, 各々の要素を座標変換によって $[-1,1]$ を定義域とする局所計算座標系に変換する. 例えば, 図 2 右に示すように第 j 番目の要素が x 方向の長さ $L^j (= b^j - a^j)$ で, 区間 $[a^j, b^j]$ とすると, 局所計算座標系 \bar{x} への座標変換式は次式となる.

$$\bar{x} = \frac{2}{L^j}(x - a^j) - 1. \quad (30)$$

(y 方向についても同様に座標変換を行う.)

第 j 要素の内部で, 速度および圧力を次式のように多項式で近似する.

$$\mathbf{u}_p^j(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M \mathbf{u}_{mnp}^j h_m(\bar{x}) h_n(\bar{y}), \quad (31)$$

$$p_p^j(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M p_{mnp}^j h_m(\bar{x}) h_n(\bar{y}), \quad (32)$$

($j = 1, \dots, 5$).

ここで, h_m は $(M+1)$ 個のガウス・ルジャンドル・ロバット点の中で M 個の点を通る M 次の多項式である. すなわち, $(P+1)$ 個のゼロ点 $x_q (q = 0, \dots, P)$ の中で, x_p で 1, それ以外の点 $x_q (p \neq q)$ でゼロとなる第 P 次のラグランジュ多項式を $h_p(x)$ とすると

$$h_p(x) = \prod_{(q=0, q \neq p)}^P \frac{(x - x_q)}{(x_p - x_q)} \quad (33)$$

となる。また、定義より

$$h_p(x_q) = \delta_{pq} \quad (34)$$

が成り立つ。ここで、 δ_{pq} はクロネッカーのデルタである。なお、ガウス・ルジャンドル点とはルジャンドル多項式のゼロ点であり、ガウス・ルジャンドル・ロバット点とはガウス・ルジャンドル点に端点 ± 1 を加えた点のことを言う。

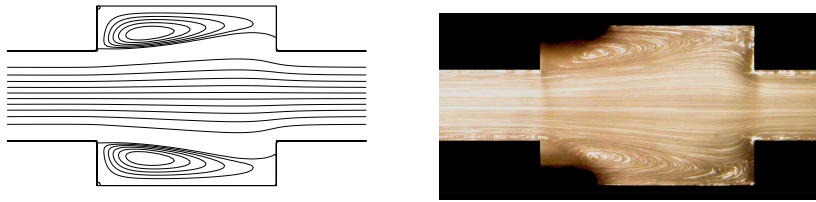
展開式 (31) および (32) を式 (26)~(29) に代入して弱形式を作りガレルキン法を用いると、展開係数である節点値ベクトル ($\mathbf{u}_{mnp}^j, p_{mnp}^j$) に関する第 j 番目の要素における代数方程式が得られる。それらを $j = 1, \dots, 5$ まで加えあわせれば全体の代数方程式が得られる。ガレルキン法における数値積分の際にはガウス・ルジャンドル・ロバット積分を用いる。

4 結果

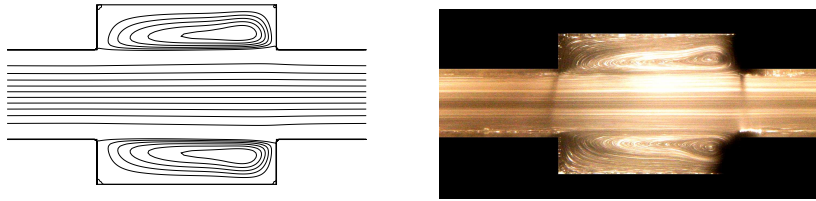
本報では計算条件として、流路長さ $L = 8$ 、凹面の幅 $l = 4$ 、平行平板の中心線から上下凹面までの高さ $a = 2$ 、奥行き方向の波数 $\alpha = 1$ とする。初期条件は、 $t = 0$ において $u = v = w = 0$ とする。スペクトル・エレメント法の展開式 (31), (32) における展開項数を $M = 14$ とし、式 (14), (15) における奥行き方向のフーリエ級数展開における展開項数を $N = 32$ 、時間刻みを $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ として計算を行う。

また、計算結果との比較を行うために、作動流体に水を用いたアルミニウム懸濁法による可視化実験を行う。アルミニウム懸濁法は流れの中にトレーサー粒子としてアルミニウム粉末を懸濁させ、適当な露出時間で写真撮影することにより流線、流跡線を得る方法である。定常流の場合には、長時間の露出で撮影を行えば、トレーサー粒子は十分に長い流跡線を描くことになるが、それは同時に流線を示す。可視化実験は数値計算における流路形状と無次元パラメータが同じになるように、 $L^* = 24(\text{mm})$ 、 $l^* = 12(\text{mm})$ 、代表長さ $h^* = 3(\text{mm})$ 、平行平板の中心線から上下凹面までの高さ $a^* = 6(\text{mm})$ として行う。

図 3(a) の左側に、定常流 ($Re = 50$) の場合における流線を示す。図において流れは左から右である。流れは流路の中心線に対して上下対称であり、主流が凹面下流側で凹面に進入することで、凹面上流側には循環渦が発生している。一方、図 3(a) の右側に、 $Re = 50$ の場合における可視化写真を示す。数値計算と実験結果を比較すると、循環渦の形状と渦中心の位置が両方で良く一致していることが分かる。次に、定常流 ($Re = 200$) における流線を図 3(b) の左側に示す。レイノルズ数 $Re = 200$ では、凹面の循環渦が大きく成長し、凹面の全てを占めるようになる。それに伴い、循環渦の中心は凹面下流側に移動する。この場合には、 $Re = 50$ の場合とは異なり、主流が凹面に進入することなく通過し、単純な平行平板間流れの速度分布と同じように、流線は平行流に近づく。それと同時に、主流と凹部との間には剪断層が形成されること



(a) $Re = 50$.



(b) $Re = 200$.

図 3: 計算結果 (左) と可視化写真 (右) .

がわかる. 図 3(b) の右側に $Re = 200$ における可視化写真を示す. 数値計算と同様に主流は平行流に近く, 循環渦は凹面の全てを占めている. また, 循環渦の中心は凹面下流に移動している. このように, $Re = 200$ においても数値計算と実験結果は良く一致していることがわかる.

以上のように, 本報の計算方法で行った数値計算と実験による可視化写真は良く一致しており, 本研究で用いた計算方法は妥当なものであると見なすことができる.

5 今後の課題

本研究では奥行き方向にフーリエ・スペクトル法を用いたことで各フーリエモードごとに STEP1~STEP4 の計算を行うことができる. これにより大部分の計算が並列化可能となり, 性能モニタによると 8 CPU の並列計算で各 CPU の負荷はほぼ均等であり大変良好な並列結果となっている. また, 各フーリエモードの計算においては, スペクトル・エレメント法の展開により形成される行列のサイズが, $O(M^2)$ 程度と大きいため, 主要な計算において十分なベクトル長とベクトル化率が得られており, 計算機の高効率な利用がなされている. しかし, フーリエモードの相互作用を計算する離散畳み込み計算の部分では, フーリエ級数の展開項数が $O(N)$ 程度と比較的小さいため, フーリエ変換を行う際のベクトル長が短くなりベクトル化の効率が悪くなるという問題がある. 今後は, この問題を解決するために展開方法を変更し, サ

イン・コサイン変換を用いたり，より効率の良い変換ルーチンを選択あるいは作成することが課題である．また，さらに大きなレイノルズ数の計算を行う必要があるが，その場合には流れが3次元流になるので，展開項数を大きくする必要があり，計算手法のさらなる高速化や高効率化が必要となる．

謝辞

本研究は、東北大学情報シナジーセンターの研究開発公募課題として行われた。研究にあたっては、同センターの多大なご協力を頂いたことに謝意を表す。

参考文献

- [1] 足立, 上原, 平行平板に周期的な凹凸を設けた流路内流れの遷移と圧力特性 (臨界レイノルズ数と圧力特性に及ぼす凹凸形状の影響), 機論, 67-653, B(2001), pp.52-59.
- [2] 足立, 上原, 平行平板に周期的な凹凸を設けた流路内流れの圧力損失と熱伝達, 機論, 67-657, B(2001), pp.95-102.
- [3] 足立, 合志, 上原, 周期的な凹凸を有する平行平板間流路内流れの遷移と圧力損失 (凹凸面を有する流路要素の組み合わせ効果), 機論, 68-672, B(2002), pp.2232-2239.
- [4] Amon C. H., 1993, Spectral element-Fourier method for transitional flow in complex geometries. AIAA Journal 31, 42-48.
- [5] Greiner M., Chen R. F., R. A. Wirtz R. A., 1991, Enhanced heat transfer / pressure drop measured from a flat surface in a grooved channel, ASME Journal of Heat Transfer 113, 498-501.
- [6] Farhanieh B., Sunden B., Numerical investigation of periodic laminar heat transfer and fluid flow characteristics in parallel plate ducts with streamwise-periodic cavities, International Journal of Numerical Method Heat Fluid Flow 1, pp.143-157, 1991.
- [7] Robrets, E. P. L., 1994, A numerical and experimental study of transition processes in an obstructed channel flow. Journal of Fluid Mechanics 260, 185-209.
- [8] Karniadakis, G, E. and Sherwin, S, J., Spectral/*hp* Element Methods for CFD,(1999), Oxford University Press.