

円管流・層流乱流遷移モデル

会津大学・コンピュータ理工 神田 英貞 (kanda@u-aizu.ac.jp)

1 はじめに：レイノルズの問題

この題目の問題はむずかしい。物理学の未解決問題に乱流がある。サイエンスの問題として、また、エンジニアリングの問題として多くの研究者が挑戦している。しかし、実際上は乱流の実用、応用研究が重要であると、また、円管流の研究は既に終わったと、さらに、スーパーコンピュータを既に十分使って計算アルゴリズムに関する知見は十分得たので、数値流体力学は終わったという流体力学研究者は多い。本当だろうか。乱流をサイエンスの問題とすると、未解決のままである。

レイノルズの問題を定義する。「Osborne Reynolds [1] が 1883 年に発見した円管流の 2 つの層流乱流遷移臨界値 (i) 色素流入実験装置(図 1)による $Rc = 12,830$ [2] と (ii) 圧力差法による最小臨界値 $Rc(\min) = 2030$ [2] を理論的に解明する」一般に、この問題は Orr-Sommerfeld 方程式による安定性理論により研究され、速度分布が放物形となる後流の成長区間においては安定となり乱流は発生しないという現実に合わない解が得られている。

私は長年にわたり、円管流の層流乱流遷移の問題はサイエンスに属し、レイノルズの発見した 12,830 と 2030 の臨界値はサイエンス上の定数として一定であると信じてその理論的解明を試みてきた [3-13]。東北大学・情報シナジーセンターのスーパーコンピュータは 1997 年から使用し、1999 年には $Rc(\min) = 2040$ を得た。その後、 $Rc = 12,830$ を計算対象としている。確認のため、2003 年からレイノルズの臨界値を図 1 に似た実験装置で検証実験をしている。

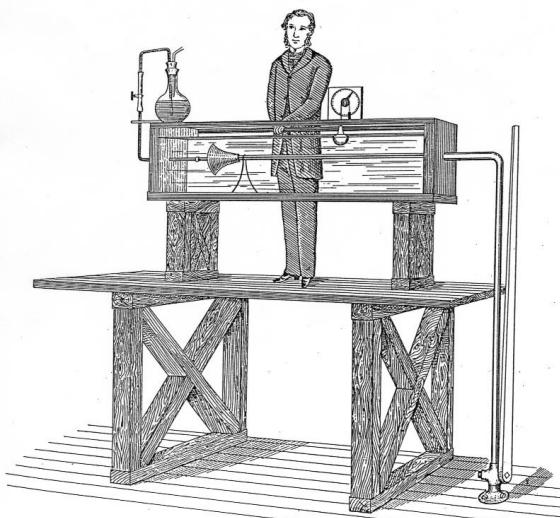


図 1 レイノルズの層流乱流遷移のための色素流入実験装置

しかし、不明な点が多く、疑問点を整理し、問題提起とする(付録I参照)。理論解明の対象とする層流乱流遷移の臨界値 Rc はいくらか。この問題がサイエンスに属するならば、時代を超えて誰が実験しても Rc の再現性を得るのは必須である。

2. 計算結果の検証

現代はコンピュータによる数値計算全盛のときである。これまで、計算を拒んできた問題もスーパーコンピュータにより処理されている。計算結果が元の方程式の解であることは、近似解であっても、正しいのは当然である。しかし、計算結果が現実の未解決問題を解決し、自然現象の真実を明らかにすることは少ない。どこに問題があるのだろうか。

今井功先生の物理モデルと数学モデルの考え方 [14] はサイエンスの問題を解くとき必須であり、座右の銘とせねばならない。自然現象の探求は一般に図2のように進み、“物理モデル + 数学モデル”が一体となって1つの理論体系を構成する。現在は、計算に追われるとともに熱中し、実験による検証が少なくなり、物理モデルの発達が未熟なのではないだろうか。物理モデルと数学モデルを車の両輪とし、さらに実験による検証を加えて、三位一体とするのが望まれる。

私の経験については、反省と偏見を込めて次のSENACにまとめたい。図8の $Re = 1000$ の黒い丸点1つを計算するのに(格子点 101×1001)、NEC SX-4/128H4でCPU時間は3,387時間(141日)であった。今は、SX-7で1-2時間に改善されている。

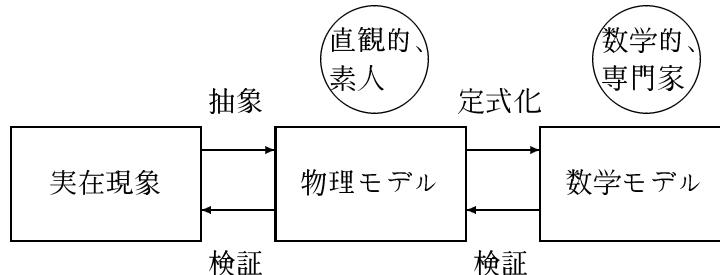


図2 自然現象の探求は段階的に進む [14]

3. 遷移モデルの前提

(1) 助走区間

円管流の軸方向の速度分布は入口で均一であるが、後流では壁面近くの粘性により放物形に発達することはよく知られている。入口から放物形になるまでの距離を助走距離 Le 、入口から助走距離までの区間を助走区間とよんでいる。 Le から後流の速度分布が放物形の区間を成長区間という。 Le は式(1)で与えられる。

$$\frac{Le}{D} \approx 0.06 Re \quad (1)$$

ここで、D は円管直径、Re はレイノルズ数である。レイノルズの色素流入実験(図 1)の場合、 $D = 2.6 \text{ cm}$, $Re = 12,830$ であるから、 $Le \approx 2001 \text{ cm}$ となる。 $Rc(\min) = 2030$ の場合は、 $Le \approx 317 \text{ cm}$ である。図 1 の実験装置の横幅は 150cm であるから、円管の長さはこれより 20-30cm 短いはずで、いずれの場合も、乱流は助走区間内で発生することは明白である。

(2) ベルマウスと円管の内径比 BD/D

私は 1994 年 5 月にイギリスのマンチェスター大学を訪問し、レイノルズの装置とラッパ形の入口形状(以後、ベルマウスとよぶ)を測定した(図 3 参照, [5])。

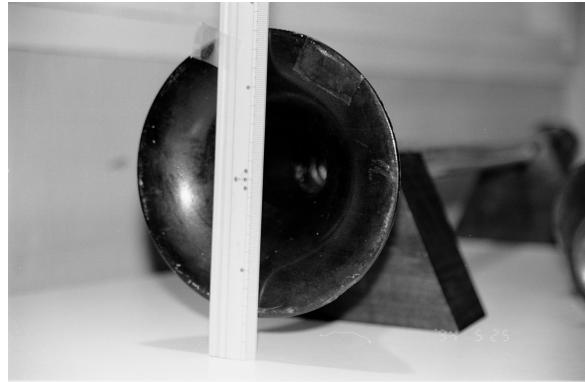


図 3 レイノルズのベルマウス装置

実験装置の水槽は今も使用されているが、数種のベルマウスはガラスケースの中に大切に保管されており、ベルマウス入口の最大内径 BD は 15.5 cm であった。円管内径 D が 2.6 cm であるから、 $BD/D = 15.5/2.6 \approx 6$ となる。もし、 $Rc(\min) = 2030$ が入口にベルマウスの無い直円管の場合であれば、 $2030 \times 6 = 12,180$ から、レイノ

ルズの得た $Rc = 12,830$ に近い数字となる。Rc と BD/D には式(2)の関係が成立するのだろうか。

$$Rc \approx 2030 \times \frac{BD}{D} \quad (2)$$

したがって、Rc が最小値 $Rc(\min)$ をとるのは直円管の場合なのだろうか。従来、Rc と BD/D の関係は未研究なので検証実験が必要である。

(3) 加速に必要な運動エネルギー KE

入口での均一速度を u_0 、半径を R ($D = 2R$)、半径方向の座標を r とすると、助走距離 Le での速度分布は式(3)で与えられる。

$$u(r) = 2u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

したがって、入口と Le での運動エネルギーの差は

$$\int_0^R 2\pi r dr \cdot u(r) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \rho u(r)^2 \right\} - \int_0^R 2\pi r dr \cdot u_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u_0^2 \right) = \frac{1}{8} \pi \rho D^2 u_0^3 \quad (4)$$

加速に必要な無次元化運動エネルギーは次式から $KE = 0.785$ となる。

$$KE = \frac{\frac{1}{8} \pi \rho D^2 u_0^3}{\frac{1}{2} \rho D^2 u_0^3} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \quad (5)$$

この値は Re に関係のない一定値である。 Re が大きくなると、遷移は発生するから、 Re により変化する変数を探すことが重要である。

KE の物理上の単位は、流量を対象にしているから、実際はエネルギーでなく、仕事率、または、パワーである。

4. レイノルズの実験の検証

レイノルズの色素流入類似実験(図1)を2003年3月以降、2005年8月までに約1200回実施した[13]。簡単にみえる実験も実験方法を定めるのが困難で、予備実験の結果は図4である。図中、○△、×は層流、遷移、乱流を表わしている。 $Re = 12,830$ の黒い丸印はレイノルズの結果である。Frank White[15]の言葉のとおり、Rc値は数の中に入った。

“A dramatic example of our limited knowledge is the fact that the original transition experiment is still not well understood.”

この予備実験の結果から4つの事実を得た:

- (i) Rcは、層流から乱流に遷移する Rc_1 と乱流から層流に遷移する Rc_2 の2種類に分類して整理するとよい。助走区間、成長区間とあわせて、遷移を4つのタイプに分類する(表1)。
- (ii) $BD/D = 1$ の直円管の場合、 Rc_1 と Rc_2 は約2000となる。
- (iii) BD/D に応じて最小の Rc_2 が存在し、これを、 $Rc_2(\min, ent)$ とする。数値の決定は実験目標である。

表 1 遷移の4 タイプ

Rc	助走区間	成長区間
Rc1	タイプ 1 (レイノルズの色素流入実験)	タイプ 2
Rc2	タイプ 3 (レイノルズの圧力差実験)	タイプ 4 (レイノルズの圧力差実験)

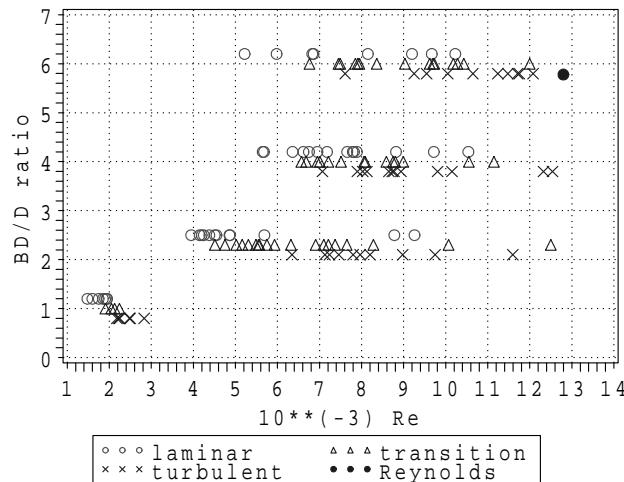


図 4 Rc と BD/D (予備実験結果)

(iv) 実験条件として、水面上にプラスチック板を敷くと上面からの乱れを防ぐため、また、速度ゼロの条件を上面につくるため実験結果の再現性が向上する。

現在、タイプ3の実験を中心であるが、タイプ1、タイプ3の実験結果を図5、図6に示す。実験回数は再現性検証のため各 Re , BD/D にたいし約10回とする。

結論は、

(v) レイノルズの $Rc = 12,830$ の再現に関しては、 $BD/D \geq 4$ 以上のタイプ1(Rc1)のとき、プラスチック板を水面上に敷く条件下で近い値が得られた。

(vi) $Rc_1 \leq Rc_2$ である。

(vii) $Rc_2(\min, ent)$ の実験値を表2に示す。 $Rc_2(\min, ent)$ は BD/D に応じて大きくなるが、 $BD/D = 4-6$ で約 5550 の一定値となる。注水後の静止時間により、また、プラスチックの板の有無により少し異なる。

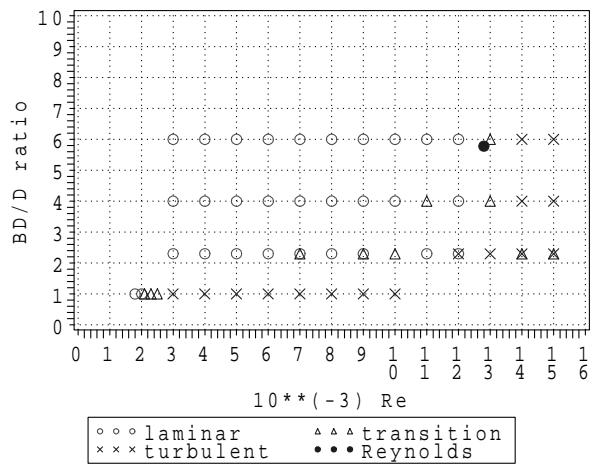


図 5 タイプ1 実験値 (Rc1)

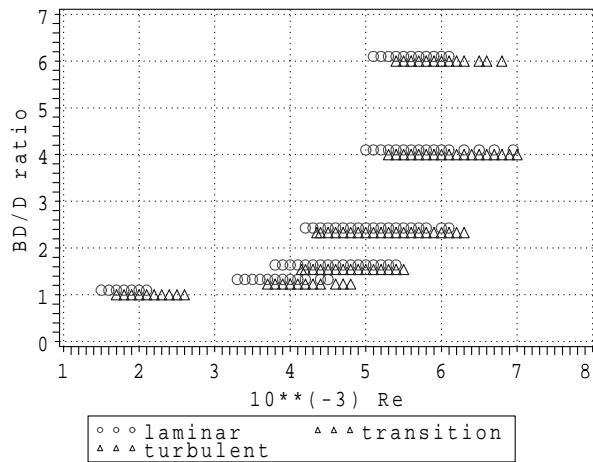


図 6 タイプ3 実験値 (Rc2)

表 2. Rc2(min, ent).

BD/D	1.0	1.23	1.54	2.33	4	6	Plastic plate, waiting time
Rc2(min,ent)	1750	3700	4150	4850	5300	—	no, 10min
	2050	4150	4900	5550	5550	5550	yes, 20min

5. 神田の層流乱流遷移モデルと計算結果

過去の数多く行なわれた実験結果から、次の神田モデルを考案した。これは仮説であって認知された理論ではないが、事実を基礎とするため普遍モデルとして通じるであろう。実際の装置では、円管入口に流体静置室、スクリーン、ベルマウス等いろいろと搅乱を抑える装置が工夫、設置されている。ここでは簡単のため、装置特性をベルマウスに限定し BD/D として考える。レイノルズ類似実験をとおして、神田モデルを検証する。

(1) レイノルズ類似の水槽内で人工搅乱を与えない静かな環境の条件下では、遷移は入口近くの助走区間内で発生する。ただし、最初から乱れることはなく、ある距離(遷移距離 L_t) が必要である。

(2) 遷移は、層流から乱流への遷移 $Rc1$ と乱流から層流への遷移 $Rc2$ がある。同一ベルマウスのばあい、式(6) が成立する。

$$Rc1 \leq Rc2 \quad (6)$$

(3) 各ベルマウスは、最小の $Rc2(min, ent)$ をもち、 BD/D の関数である(表2)。 BD/D が最小の1のとき、つまり直円管の場合、 Rc は最小値 $Rc(min) \approx 1750-2050$ となる。 BD/D が約4を超えると、 $Rc2(min, ent)$ の値は殆んど同じである。 $Rc2$ の値は、同一 BD/D でも実験環境により少し異なる。過去に実施された他の研究者の実験結果によれば、水槽を大きくしたり、水槽を無くして直接貯水槽と円管を連結した場合は $Rc(min, ent)$ の値は大きくなると予想される。

$$\lim_{BD/D \rightarrow 1} Rc2(min, ent) = Rc(min) \approx 1750 - 2000 \quad (7)$$

(4) 層流乱流遷移発生の判定条件を次のように仮定する。速度分布は、円管入口で均一、助走距離で放物形になる。この助走区間内で、円管内流の運動エネルギーは増加し、増加値は Re に無関係であり一定値 $KE = 0.785$ をとる。加速エネルギーは壁面からの法線方向力 NWS により生じ、 NWS による助走区間内で加速に使われる仕事率を RW とする。 Re が大きくなると、 NWS と RW は減少する。(NWS と RW の解説は付録II参照。)

$$\begin{cases} (i) RW \geq KE : \text{流れは安定} \\ (ii) RW < KE : \text{流れは不安定} \end{cases} \quad (8)$$

図7は直円管の場合の RW と KW の関係を示している[6]。 KE は Re に関係なく一定値 0.785 であるが、 RW は Re が増えるとともに減少し、 RW と KE の交差点が $Rc(min) = 2040$ を示している。同様のことは平行平板間の流れ($KE = 0.543$)にも適用可能で、図8から $Rc(min) = 1230$ を得た[10, 11]。2つの $Rc(min)$ は実験値に非常に近い値である。

(5) 内部流(円管流、平行平板間流れ等)と外部流(平板上の流れ等)の遷移を同一に論じることは正確でない。内部流には $Rc(min)$ が存在するが、外部流はある距離を過ぎた後流で必ず遷移が発生する[16]。

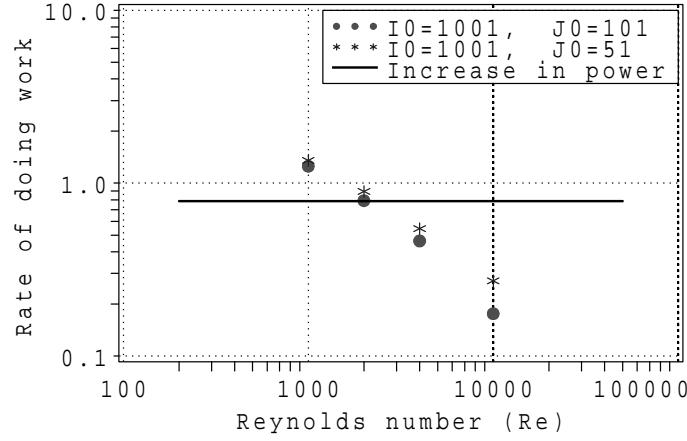


図 7 RW と $Rc(\min)$: 円管内流

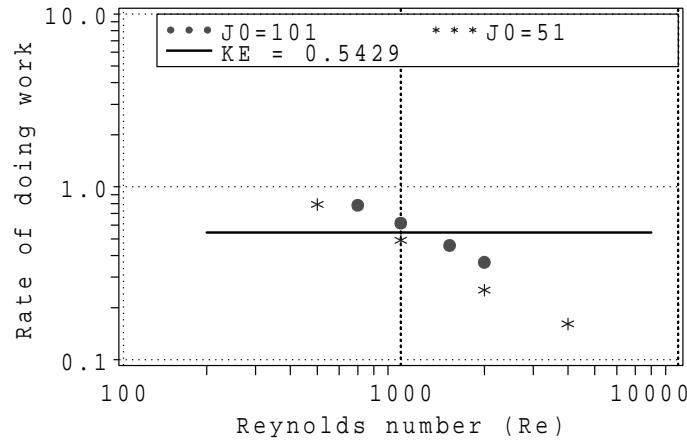


図 8 RW と $Rc(\min)$: 平行平板間の流れ

6 おわりに

これまでの計算結果から、円管流にたいして $Rc(\min) = 2040$ 、平行平板間の流れにたいして、 $Rc(\min) = 1230$ を得た。さらに、ベルマウス形状の入口 $BD/D = 1.23$ にたいして、 $Rc(\min, ent) \approx 4,000$ を計算から得ている(未発表)。一般に、遷移の問題は安定性理論により研究されている。しかし、神田モデルは仮説ではあるが、3つの事例で実験値に合致するため、マクロ物理モデルとして検討の価値はあると信じている。

飛行機の揚力は翼形状で決まり、船の抵抗は船の形で決る。同様に、円管流の層流乱流遷移も入口形状で決るのでないだろうか。このモデルが正しければ、数値流体力学は微分幾何、数値格子生成法とともに格段の発展をするだろう。

現在は、計算アルゴリズムをガウスザイデル反復法の陽解法から陰解法に改善し、格子を細分し、ベルマウス形状を含む表2の実験値を対象に、検証計算をしている。

謝辞

東北大学・情報シナジーセンターの皆様には誠にお世話になりました。また、なかなかご要望に応えずご迷惑をおかけしました。申し訳ありません。私に残された研究時間は少ないので、再度、計算を始めますのでご指導下をよろしくお願いします。

参考文献

- [1] Reynolds, O., 1883, An experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the law of Resistance in Parallel Channels, Trans. Roy. Soc. Lond., 174, pp. 935-982.
- [2] Lamb, H., 1975, Hydrodynamics (6th ed.), pp. 664-665.
- [3] Kanda, H. and Oshima, K., 1998, Numerical Study of Radial Pressure Distribution for Entrance Flow in a Circular Pipe, Proc. of 1998 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, ASME FED-Vol. 245, 98-5005.
- [4] Kanda, H., 1998, Numerical Study of Effects of a Bellmouth on the Entrance Flow in a Circular Pipe, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 1998, ASME FED-Vol. 247, pp. 181-188.
- [5] Kanda, H., 1999a, Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flows. Part 1. Experimental Definition of the Problem, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 1999, ASME FED-Vol. 250, pp. 189-196.
- [6] Kanda, H., 1999b, Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flows. Part 2. Calculation of the Minimum Critical Reynolds Number, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 1999, ASME FED-Vol. 250, pp. 197-204.
- [7] Kanda, H., 2000a, Simulation of Reynolds' Color-dye Experiments on Instability of Circular Pipe Flows. Part 1. Discussion of the Problem, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 2000, ASME FED-Vol. 253, pp. 611-618.
- [8] Kanda, H., 2000b, Simulation of Reynolds' Color-dye Experiments on Instability of Circular Pipe Flows. Part 2. Definition of the Problem, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 2000, ASME FED-Vol. 253, pp. 619-626.
- [9] Kanda, H., 2001, Difference in Critical Reynolds Number between Hagen-Poiseuille and Plane Poiseuille Flows, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 2001, ASME FED-Vol. 256, pp. 189-196.
- [10] Kanda, H., 2002a, Verification of a Model for Occurrence of Turbulent Flow between Parallel Plates, Proc. of Mechanical Engineering Congress, 2002 Japan (MECJ-02), No.02-1, pp. 65-66.
- [11] Kanda, H., 2002b, Calculation of a Minimum Critical Reynolds Number for Flow between Parallel Plates, Proc. of ASME Fluids Engineering Division - 2002,

ASME IMECE2002-33273.

- [12] Shimomukai, K., Kanda, H., 2005, Accurate Study of Normal Pressure Distribution in Entrance Region of Channel, Proc. of 2005 ASME IMECE, IMECE2005-80353.
- [13] Kanda, H., Yanagiya, T., 2005, Experimental Conditions for Minimum Critical Reynolds Number in Pipe Flow, Proc. of 2005 ASME IMECE, IMECE2005-80637.
- [14] 今井功、2003, 新感覚物理入門、岩波、p. 2.
- [15] White, F. M., 1991, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, p. 369.
- [16] Rivas, Jr., M. A., and Shapiro, A. H., 1956, On the Theory of Discharge Coefficients for Rounded-Entrance Flowmeters and Venturis, Transactions of ASME, April, 1956, pp. 489-497.
- [17] Ekman, V.W., 1910, Fys., bd. 6, no. 12, pp. 1-16.
- [18] Van Dyke, M., 1982, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press, Stanford, p. 61.
- [19] Schlichting, H., 1979, Boundary-Layer Theory (7th ed.), p. 451.

付録 I： レイノルズの問題への疑問点

光速度や電磁気関係の諸定数はかなりの精度で正しいものとされている。ある定数の精度を1桁上げるのに数年以上かけたと自然科学史は教えている。したがって、自然科学関係の教科書に記載されていることは正しいものと信じてきたが、流体力学はかなり精度に幅があるようにみえる。ここに、素朴な疑問点を提示する。(疑問点には、本文中にほとんど答えている。)

(i) レイノルズの発見した $R_c = 12,830$ は再現可能か。また、その時の実験条件は何か。

(ii) Ekman [17] はレイノルズの実験装置(図1)を使って、 $R_c \approx 13,000, 21,000, 38,000, 44,000, 51,000$ 等の臨界値を得たが何故なのか。次の(iii) Van Dyke の「時代と搅乱の大きさ」の説に矛盾しないのか。

(iii) Van Dyke [18] のレイノルズの実験装置(図1)による R_c に関する次の説明は正しいのだろうか。また、レイノルズの実験装置を使っての現在の R_c 値はいくらなのか。

「Modern traffic in the streets of Manchester made the critical Reynolds number lower than the value 13,000 found by Reynolds」

(iv) レイノルズの発見した $R_c(\min) \approx 2000$ は再現可能か。その時の実験条件は何か。

(v) $R_c(\min) = 2030$ (Lamb, [2]) と $R_c(\min) = 2300$ (Schlichting, [19]), どちらが正しいのか。誤差の約 15% は流体力学では許容範囲以内であり、精度向上は望めないのか。

- (vi) 図 1 と類似の色素流入装置を使って $Rc(\text{min}) \approx 2000$ を得ることは可能か。
- (vii) 実験値 Rc は何故研究者毎に異なるのか。原因を実験装置自体と流体中の搅乱とに分けた場合、どちらが主なのか。それとも他に主原因はあるのか。
- (viii) 遷移の原因とされる搅乱の種 (disturbances) とは何か。人工搅乱でない自然の静かな環境下での搅乱は観察、識別可能であり、搅乱の数式化・定量化は可能か。
- (ix) 搅乱は流入する流体の中に最初から存在するのか。それとも、円管内の流れの中で発生するのか。後者の場合、それは壁面近傍で発生するのか、中心近くで発生するのか。
- (x) 実験装置と遷移を発生させる搅乱には強い因果関係があるのか。数式化可能か。
- (xi) 実験値 Rc の異なる主原因は実験装置が異なるからでないのか。つまり、主原因は流体の中にあるのではなく、装置、特に円管入口に取付けられたベルマウス壁面が作りだしているのではないのか。
- (xii) 遷移発生の場所は予測可能か。実験によると遷移は助走区間内で発生するが、何故助走区間に注目した理論研究は少なく、十分発達した流れの中での理論研究が多いのか。
- (xiii) 遷移は助走区間で発生するが、入口からそのまま発生しないで、ある距離 (遷移距離 Lt : $Lt \ll Le$) が必要である。何故、入口から発生しないのか。入口近傍には搅乱を抑える抑止力が働いているのではないか。
- (xiv) 層流から乱流への遷移は、助走区間で発生しなくても、十分発達した流れの中で発生するのか。発生するとすれば、その理由は何か。

付録 II： 壁面法線方向力 NWS

従来の結果では、軸方向の距離 x の座標に無次元化した $x/(D \cdot Re)$ を選べば、助走区間での速度分布の成長、軸方向の圧力損失はほとんど同一で Re の関数とならない。しかし、 Re が大きくなると、壁面法線方向力 NWS は小となる特質をもつ。

Navier-Stokes 方程式のベクトル表示は

$$\frac{\partial V}{\partial t} - V \times \omega = - \text{grad } (\frac{p}{2} + \frac{1}{2}V^2 + \Omega) - \frac{1}{Re} \nabla \times \omega \quad (9)$$

壁面上では速度ベクトルはゼロであるから、圧力分布は次式となる。

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = - \frac{2}{Re} [\nabla \times \omega]_r \Big|_{r=R} = - \frac{2}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \right) \Big|_{r=R}$$

$$= \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \right|_{r=R} < 0 \quad (10)$$

遷移発生の Re 前後において、助走区間内では境界層理論の「軸方向に垂直な圧力分布は一定である」という近似は成立せず、また、ベルヌーイの法則とも異なり、管壁上の圧力は中心部の圧力よりも低い。これは、壁面上での渦度の回転 (curl) の法線方向成分の効果による。この力を壁面法線方向力 NWS と定義する。

$$NWS \equiv \frac{2}{Re} [\nabla \times \omega]_r \Big|_{r=R} = - \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x} \right|_{r=R} = - \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} > 0 \quad (11)$$

NWS の重要な特質は

- (i) NWS は、壁面から中心に向う法線方向力である。
- (ii) したがって、NWS は、助走区間内の中心流の加速に影響を与える。
- (iii) NWS は、Re が大きくなれば、小さくなる。
- (iv) NWS は、BD/D が大きくなれば、大となる。

次に、NWS による仕事率 RW を求める。熱力学によれば、圧力 × 体積 = エネルギー、である。非圧縮流体のエンタルピー H の変化量 (単位はエネルギー) は、

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(pV) \approx V \Delta p \quad (12)$$

ここで、U は内部エネルギー、V は微少体積、 Δp は半径方向の圧力差である。したがって、微少体積 V における、NWS による仕事率は上記エネルギーを時間で割って、

$$RW \equiv \frac{WORK done by NWS}{Time} = \frac{V \Delta p}{Time}$$

流れ場全体の RW は式 (13) により求めることができる。

$$RW = \sum_i RW(i) = \sum_i \frac{V(i) \Delta p(i)}{t(i)} = \sum_i \{V(i) \Delta p(i) \omega(i)\} \quad (13)$$

数値計算では圧力を仮定を入れないことが重要である。計算手順は、先ず、渦度輸送方程式 (14) と渦度の式 (15) から流れ関数 ψ と渦度 ω を得て、その値から速度 (16) を求める。次いで、定常状態の Navier-Stokes 方程式 (17) から圧力の初期値を計算し、圧力のポアソン方程式 (18) から滑らかな解を得る。最後に、式 (13) から RW を求める。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \right\} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] \quad (14)$$

$$-\omega = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\psi}{r} \right) \quad (15)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - 2 \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -2 \left[r \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{v^2}{r} \right] \quad (18)$$