

スーパーコンピュータを用いた平行平板間流れ場の 圧力に関する解析

下向 建秀^{*}, 柳谷 貴之^{*}, 大泉 健治[†], 神田 英貞^{*}

^{*} 会津大学・コンピュータ理工

[†] 東北大学情報シナジーセンター

概要

平行平板間流れ場の圧力に関する子細な解析を試みた。本論文では、レイノルズ (Re) 数による変化及び格子変化による影響について述べる。精密な数値計算により、境界層方程式、ベルヌーイの法則とは若干異なる結果を得た。その差異とは、流れの発展初期の段階においては、壁側の圧力は中心線上のそれよりも低い値を示すというものである。ただし、この結果は Re 数が 2000 以下で顕著に現れている。格子変化による影響は、全体ではさほどの差異は見られなかった。なお、この計算は流れ関数と渦度表示の方程式に対し、差分法で行った。この方程式系の特徴は、変数の少なさ及び連続の式を厳密に満足する点にある。しかし、格子幅を細密にとり、また、反復法を用いて解くため、計算時間が長いという問題点がある。高いベクトル演算機能をもつスーパーコンピュータを用い、また、計算アルゴリズムを見直すことにより、計算時間の削減を試みた。

Notation

Re	レイノルズ数 ($= \frac{2hu_0}{\nu}$)
xe	定常状態までの助走区間の長さ
Le	無次元での定常状態までの助走区間の長さ
h	平行平板間の幅
u	x 方向の速度
v	y 方向の速度
t	時間刻み
p	圧力
ΔP	入口から x 方向への圧力の落ち込み (pressure drop)
ψ	流れ関数
ω	渦度

1 はじめに

はじめに、解析条件について述べる。平行平板間の非圧縮性流体解析の体系化はすでに理論上において、また、数値計算においてもなされている。本研究の主目的は、二次元平行平板の入り口で、一様流速度分布が与えられた場合の、流れ場における圧力分布に関して高精度の解析を行うことである。特に、流れ方向に垂直な断面上での圧力分布について研究する。元来、平行平板の壁側と中心線上での圧力分布に関しての議論では、ベルヌーイの法則によると壁側の圧力の方が中心線上のそれよりも高いとされ、また、境界層方程式を用いた解析によると、壁側と中心線上での圧力に差は無いとされている。本研究では、近年発達の著しい高速計算機を用い、また、解析方法としては、完全な形の Navier Stokes 方程式により、解析を行う。

実際の計算としては、まず、平行平板内の流れについて、入口で時刻 $t = 0$ 以降一様な流速で入る流れの定常流への移行を計算した。以下に図 1 を示す。入口で x 方向への速度を u_0 と与え、 y 方向の速度は 0 とする。

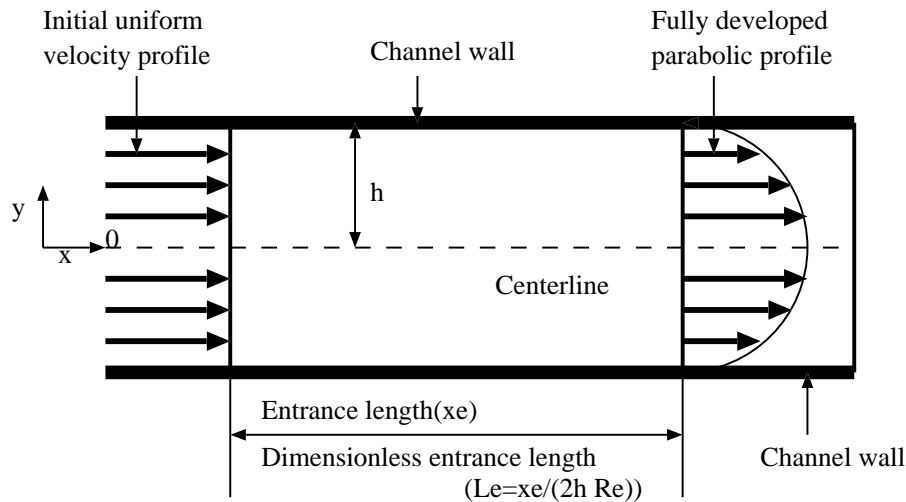


図 1: Velocity development in the entrance region

平行平板間流れにおいて、入口での一様な速度は、放物型に増加する。これは、壁面付近における粘性力の働きによる。圧力に関しては、 x 方向、 y 方向の両方の解析を行った。格子間隔を小さくすることにより、壁側付近と中心線上での圧力分布の微細な変化の解析を行った。

2 基礎方程式

非圧縮性流体の運動を支配する方程式は、質量保存を表す連続の方程式 (1) 及び運動量の保存を表すナビエーストークス方程式 (2) である。

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 U, \quad (2)$$

この時、 p は圧力であり、 Re はレイノルズ数である。(2) 式の圧力項の消去及び、ベクトル解析の公式より

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\omega \cdot \nabla)U - (U \cdot \nabla)\omega + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

を得る。ただし、 ω は渦度で、

$$\omega = \text{rot } U \quad (4)$$

である。(3) 式及び、速度 u 、 v と流れ関数 ψ との関係式

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (5)$$

より、流れ関数-渦度の方程式

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad (6)$$

及び渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega, \quad (7)$$

が得られる。次に、(7) 式を ω に関して、陰的に解くオイラー陰解法を考えると、

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega^{n+1}}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

となる。圧力分布は、以下で与えられる [11]。

$$\nabla^2 p = 4 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (9)$$

流れ関数-渦度の計算及び、圧力分布の計算の差分方程式は、双方ともヤコビ法を用いて解かれた。また、壁側の渦度は3点から1階微分を決めるので、最も精度が良くなる様に選択すると、以下の式となる。

$$\omega = -\frac{3u(i, J0) - 4u(i, J0 - 1) + u(i, J0 - 2)}{2\Delta y} = \frac{4u(i, J0 - 1) - u(i, J0 - 2)}{2\Delta y} + O(k^2) \quad (10)$$

同様に、圧力分布に関しても、2階の精度を得られるように近似式を選択した。

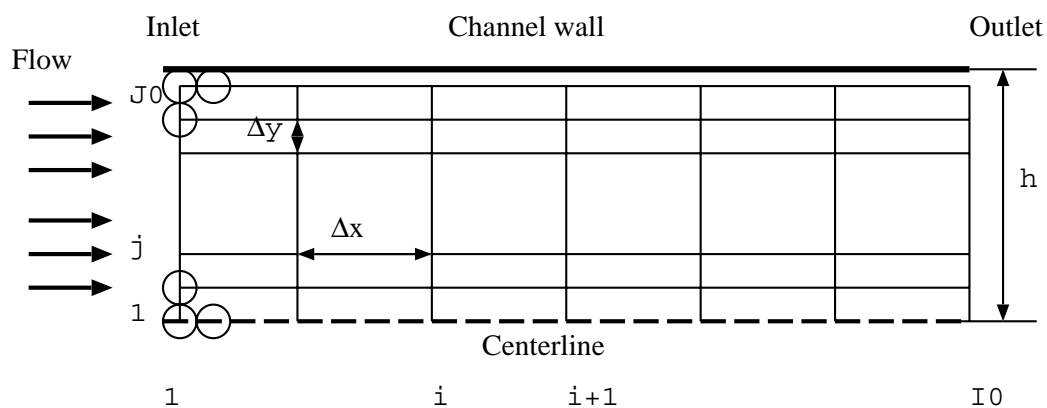


図 2: Mesh system between channels

3 格子生成及び計算手順

生成した格子の概略図は図 2 に示す。プログラムの実装は、図 3 のフローチャートに沿った。ここで、 I_0 、 J_0 は、それぞれ x 方向、 y 方向の格子点の最大数である。計算には、東北大学情報シナジーセンター所有の NEC SX-7 スーパーコンピュータを使用した。なお、計算は 4 節、5 節で述べるように十分な高速化チューニングの後、行った。

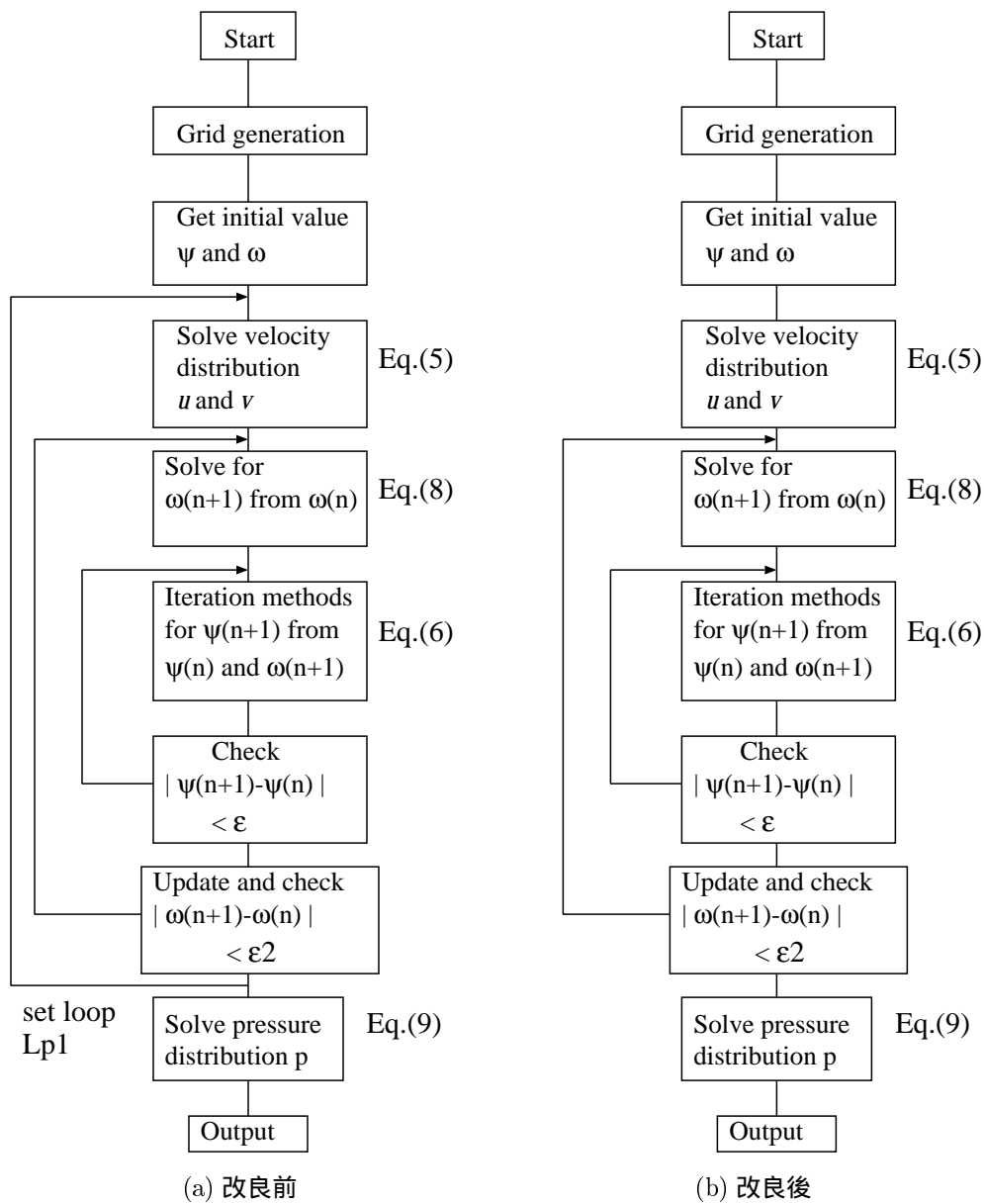


图 3: Flow chart for $\psi - \omega$ computer solution

表 1: 改良以前の計算結果

User Time (sec)	MOPS	MFLOPS	VLEN	V. Op. Ratio (%)	Bank (sec)
347637.312594	878.508580	348.500303	49.608194	90.274749	73546.704863

表 2: 改良 1: 計算アルゴリズムを見直した結果

User Time (sec)	MOPS	MFLOPS	VLEN	V. Op. Ratio (%)	Bank (sec)
281458.628457	231.857803	65.654693	247.156050	49.036853	475.109826

4 高速化の手順

プログラミングは Fortran90 を用いて行われ、コンパイラは f90 を用いた。また、計算モデルとして、格子数を I 方向に 1000、 J 方向に 50 とした平行平板流れ場を考える。高速化の手順としては、

1. 計算アルゴリズムの見直し
2. ベクトル演算率の向上及び平均ベクトル長の改善
3. バンクコンフリクト時間の削減

を行った。

4.1 計算アルゴリズムの見直し

計算アルゴリズムは、図 3 のフローチャートの (a) から (b) へと変更した。(a) では時間刻みを考慮し、全体のループ回数を指定出来る。しかし、十分に誤差判定を満足しても計算を続けるため、効率が悪い。(b) では、誤差判定基準を満足するまで時間発展させれば良いため、計算効率は改善される。なお、同時にコンパイルオプション `-Pauto` の指定による自動並列化を行い、4CPU で実行した。結果は、表 1 から表 2 となった。平均ベクトル長の増加及びバンクコンフリクトの削減により、計算時間は短縮されたものの、ベクトル演算率が極端に低下した。

4.2 ベクトル演算率の向上及び平均ベクトル長の改善

まず、多重ループにおいて配列データへのアクセスのアドレスが連続になる様に、ループの入れ換えを行った。この改良は、キャッシュラインの有効利用を目的として施される。結

果として、データ参照が効率化され、メモリアクセスのオーバーヘッドが減少し、計算の高速化が期待できる。図2で示している様に、本プログラムでは i, j の最大値 $I0, J0$ は既知であり、常に $I0 > J0$ であるため、以下の例の様に入れ換えを行った。プログラム全体では、23箇所が改良された。

```
do i=1,m                                do j=1,n
  do j=1,n                                do i=1,m
    a(i,j)=b(i,j)+c(i,j)  ----->    a(i,j)=b(i,j)+c(i,j)
  end do                                    end do
end do                                    end do
```

次に、漸化式のマクロ演算により、ベクトル演算率の向上を目指した。下に実際改良を加えた部分を示す。

```
mainloop: do
  do j = 2, j1
    do i = 2, i1
      w2 = (p(i,j+1)+pd(i,j-1))/dy2
      w3 = (p(i+1,j)+pd(i-1,j))/dx2
      pd(i,j) = ( w2 + w3 - 2.*s(i,j) )/(2.*dxy2)
    end do
  end do
end do
```

と書かれた部分を、以下の形にする。また、あらかじめ計算できる部分はループ外で前もって計算し、演算数(量)を減らした(m11、m12、m20)、 $X(i) = X(i-1) * \text{式} + \text{式}$ の形式は漸化式のマクロ演算にあたる。

```
m11 = 1/(dx2*2.*dxy2)
m12 = 1/(dy2*2.*dxy2)
m20 = 1/(2.*dxy2)
mainloop: do
  do j = 2, j1
    do i = 2, i1
```

```

pd(i,j) = pd(i,j-1)*m12 + pd(i-1,j)*m11    &
+ p(i,j+1)*m12 + p(i+1,j)*m11    &
- 2.*s(i,j)*m20
end do
end do

```

この改良により、表3の結果が示された。ベクトル演算率が向上し、計算時間に大幅な改善がみられたものの、バンクコンフリクト時間が大きく、十分な高速化が達成されたことにはならない。しかし、さらにいくつかの配列宣言の見直しとサブオプションにより、表4の結果にまで削減できた。

表 3: 改良 2: ベクトル演算率と平均ベクトル長の向上

User Time (sec)	MOPS	MFLOPS	VLEN	V. Op. Ratio (%)	Bank (sec)
84536.354285	435.893076	201.302413	247.554974	88.051593	573.515205

4.3 まとめ

施したチューニング全体では、計算時間はおよそ 1/15 程度まで削減できた。図 4 にその推移を示す。

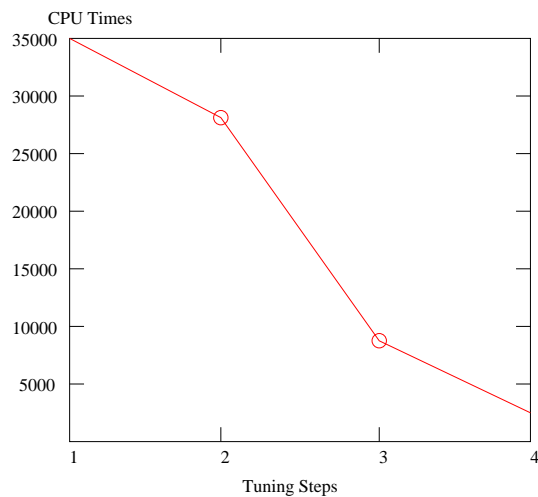


図 4: 高速化チューニングと計算時間

表 4: 改良 3: バンクコンフリクト時間を削減した結果

User Time (sec)	MOPS	MFLOPS	VLEN	V. Op. Ratio (%)	Bank (sec)
23481.657600	444.861815	231.344753	249.448949	99.086151	23.022738

5 計算結果

計算精度の比較として、無次元での定常状態までの長さである Le より求められる、平板間の中心線上の速度達成率 92%、98%、99%、99.9% の地点までの距離を表 5 に示す。なお、これらの数値に関して、先行研究との比較も同時に示す。また、

$$Le = \frac{xe}{2hRe} \quad (11)$$

である。

次に、図の説明をする。以下、図 5 から図 8 は、格子数を I 方向に 1000、 J 方向に 100、150、200、250 と変化させた場合の壁側の圧力の落ちこみ (Pressure drop) を示している。また、 Re 数は 800、1000、1600、2000 とした。なお、無次元での格子幅を $\Delta X = \Delta x / Re$ とし、 $X \leq 0.1$ の範囲で解析を行った。格子の変化による圧力分布の微細な変化を確認するため、 $X \leq 0.01$ の範囲で表示する。計算時間 (新プログラム、SX-7 にて実行) は表 6 に示す。また、旧プログラム (SX-4 にて実行) の計算時間を表 7 に示す。格子数の関係により、 $I_0 = 1000$ 、 $J_0 = 100$ とした計算 (表中*) にて比較できる。結果は

$$\begin{array}{ccc} 3387h28m \text{ --- } & & > 3h33m(12839sec) \\ \text{SX-4} & & \text{SX-7} \end{array}$$

となった。実行環境が SX-4 から SX-7 へと変更されているものの、アルゴリズムの改善により、約 950 倍の計算時間の短縮を得た。

図 9 から図 12 は、格子数を J 方向に 100 と固定し、 $X \leq 0.002$ の範囲で Re 数の変化による壁側と中心線上の Pressure drop の変化を示した。

表 5: Dimensionless entrance length

Re	92%	98%	99%	99.9%
800	0.0153	0.0333	0.0424	0.0731
1000	0.0153	0.0331	0.0421	0.0748
1600	0.0156	0.0336	0.0427	0.0732
2000	0.0153	0.0331	0.0421	0.0747
Naito & Hishida [10]	0.0147	-	-	-
Bodia & Osterle [1]	-	0.034	0.044	0.076
Collins & Schowalter [2]	-	0.034	-	-
Wang & Longwell [12]	-	0.0335	-	-
Han [4]	-	-	0.0396	-
Kiya, Fukusaku & Arie [9]	-	-	0.0445	-

表 6: Mesh system and CPU times(1)– SX-7

Re	I0/J0	Loop(times)	CPU time(sec) (Revised program)
800	1000/100	21178	13848
-	1000/150	26820	21581
-	1000/200	34745	30088
-	1000/250	41231	33207
1000	1000/100	25059	12839 *
-	1000/150	26820	19058
-	1000/200	38122	35657
-	1000/250	48083	34454
1600	1000/100	36814	20479
-	1000/150	41364	29338
-	1000/200	48023	30642
-	1000/250	57863	51931
2000	1000/100	31201	25621
-	1000/150	37779	36483
-	1000/200	44086	42152
-	1000/250	47235	56319

表 7: Mesh system and CPU times(2)– SX-4

Re	I0/J0	T-steps	CPU time
			(Old program)
500b	1001/51	2,500,000	425h 33m
1000b	1001/51	3,400,000	450h 04m
2000b	1001/51	2,000,000	101h 46m
4000b	1001/51	2,900,000	408h 17m
700	201/101	1,400,000	518h 43m
1000c	1001/101	3,400,000	3,387h 28m *
1500	201/101	1,200,000	495h 45m
2000	201/101	1,500,000	499h 50m

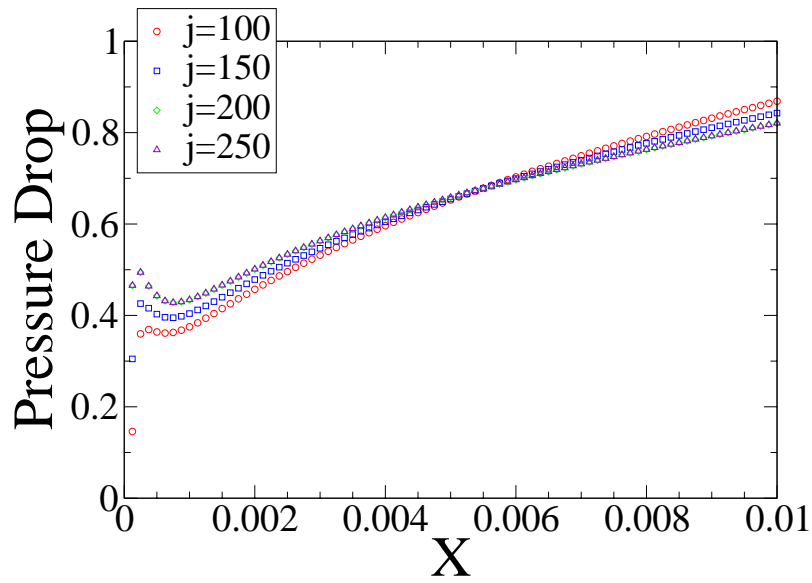


图 5: Re = 800

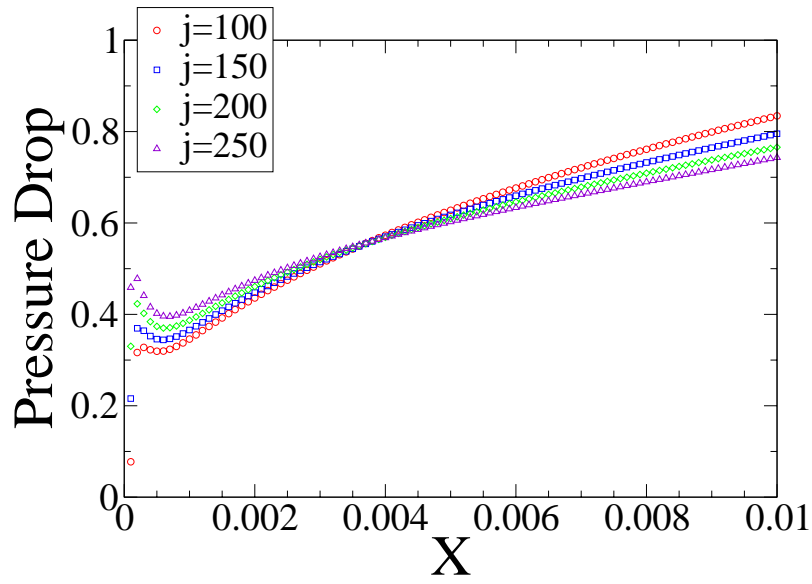


Figure 6: $Re = 1000$

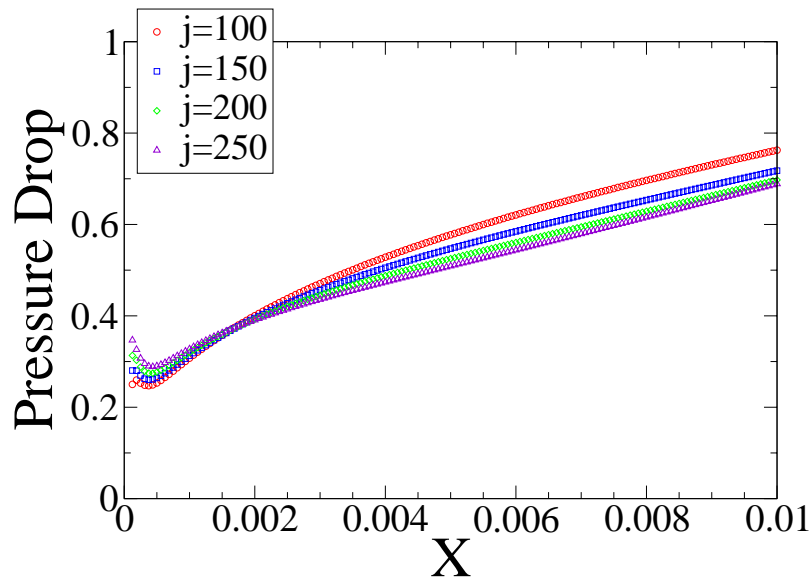


Figure 7: $Re = 1600$

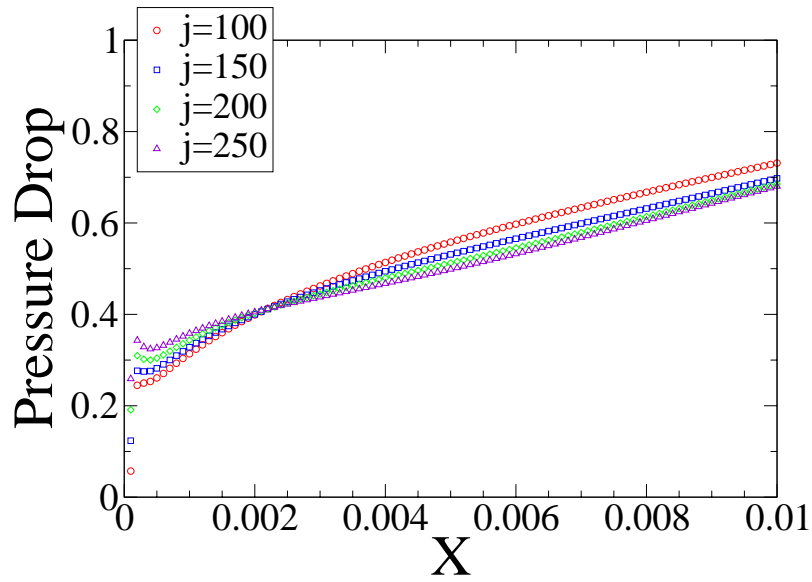


Figure 8: Re = 2000

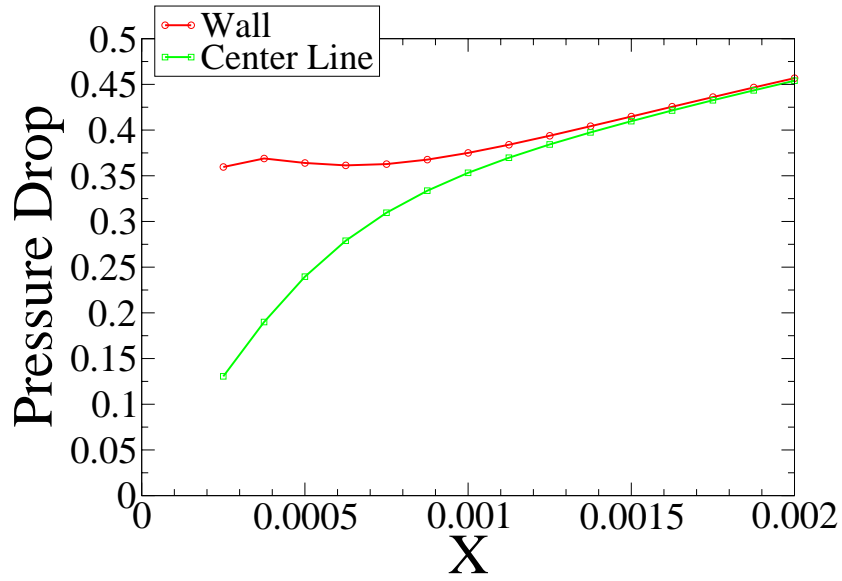


Figure 9: Re = 800

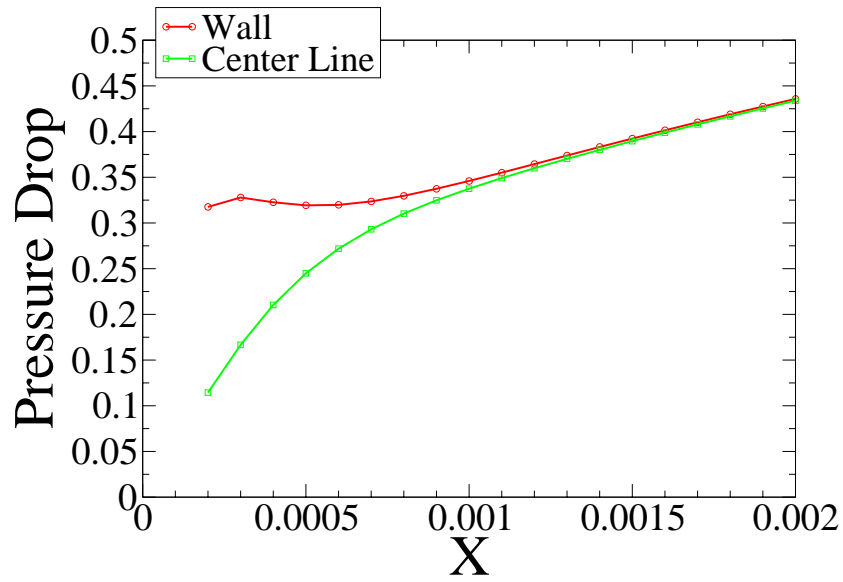


Figure 10: Re = 1000

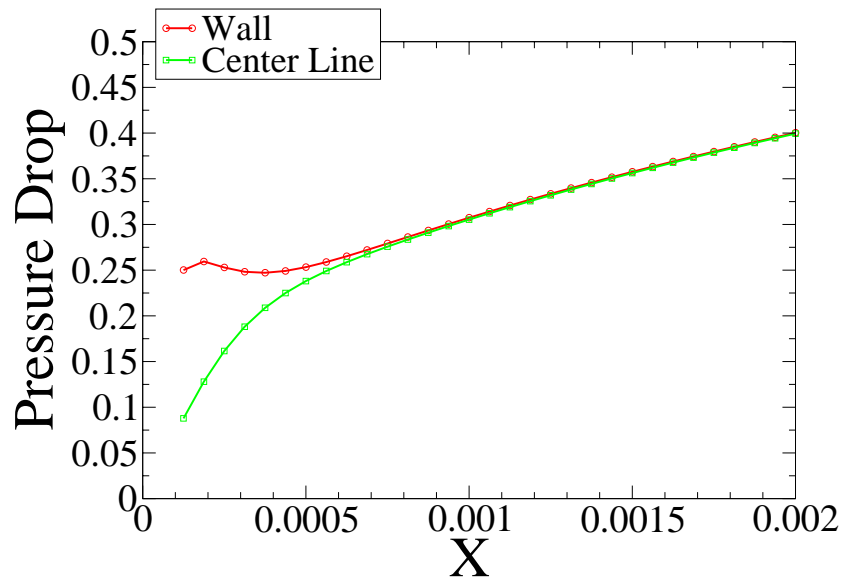


Figure 11: Re = 1600

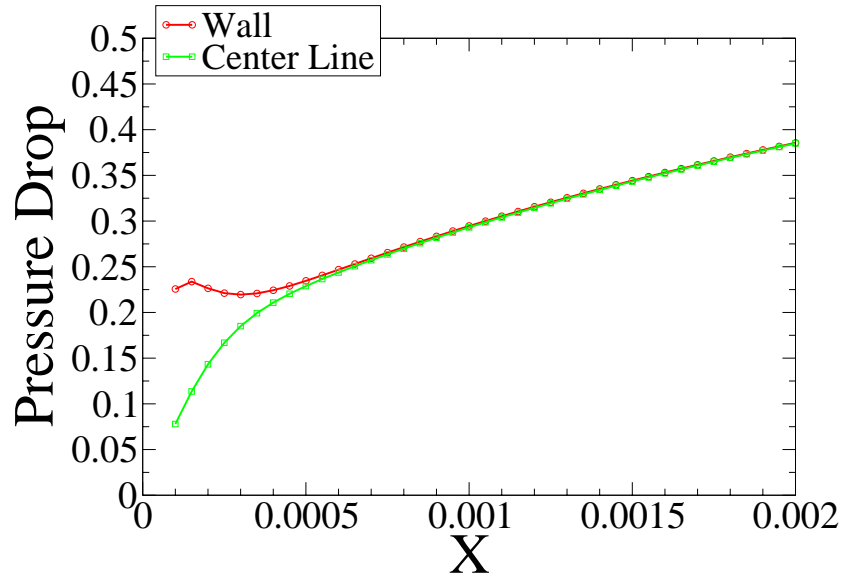


図 12: $Re = 2000$

6 むすび

流れ関数と渦度表示の方程式系に対し、高いベクトル化率での高速な計算を行うアルゴリズムを実現した。その結果、計算時間はアルゴリズムの改良で $1/15$ (SX-7にて実行)、ハードウェアの変更 (SX-4 から SX-7) も含めると $1/950$ にまで削減できた。今後、スーパーコンピュータの発達により、さらなる高速化が見込めると考えられる。また、計算結果より、 J 方向の格子変化は、圧力分布の解析全体においては大きな影響をもたらすものではなかった。 $X \leq 0.002$ での解析では、平行平板の入口領域ではかなり大きな圧力勾配が、壁側と中心線間にみられた。なお、この勾配は、 Re 数の増加に従い小さくなっている。中心線の方が壁側よりも圧力が高いという結果となった。

謝辞

本研究は、東北大学情報シナジーセンターとの共同研究として行われた。SX-7 上でのプログラムの最適化及びベクトル化チューニングに関し、情報シナジーセンターより適切な助言を頂いた。この場を借りて、感謝したい。

参考文献

- [1] Bodia, J. R., and Osterle, Finite Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette Flow Developments, Appl. Sci. Section A, Vol. 10, pp. 265-276, 1961.

- [2] Collins, M., and Schowalter, W. R., Laminar Flow in the Inlet Region of a Straight Channel, *Phys. of Fluids*, Vol. 5, pp. 1122-1124, 1962.
- [3] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. I, Dover, p.97, 1965.
- [4] Han, L. S., Hydrodynamic Entrance Lengths for Incompressible Laminar Flow in Rectangular Ducts, *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 403-409 September 1960.
- [5] Kanda, H. and Oshima, K., Radial Pressure Distribution for Entrance Flow in a Circular Pipe, *AIAA 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, AIAA Paper 98-0792, 1998.
- [6] Kanda, H., Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flow. Part1. Experimental Definition of the Problem, *Proc. of ASME Fluids Engineering Division*, ASME FED-Vol. 250, pp. 189-196, 1999.
- [7] Kanda, H., Computerized Model of Transition in Circular Pipe Flow. Part2. Calculation of the Minimum Critical Reynolds Number, *Proc. of ASME Fluids Engineering Division*, ASME FED-Vol. 250, pp. 197-204, 1999.
- [8] kanda, H., Difference in Critical Reynolds Number between Hagen-Poiseuille and Plane Poiseuille Flows, *Proc. of ASME Fluids Engineering Division*, ASME FED-Vol. 256, pp. 189-196, 2001.
- [9] Kiya, M., Fukusako, S., and Arie, M., Effect of Non-Uniform Inlet Velocity Profile on the Development of a Laminar Flow between Parallel Plates, *Bulletin of JSME*, Vol. 15, No. 81, pp. 324-336, 1972.
- [10] Naito, E., and Hishida, M., Laminar Boundary Layers in the Entrance Regions of Two Parallel Plates and a Circular Tube, *Bulletin of Magoya Institute of Technology*, Vol. 24, pp. 143-151, 1972.
- [11] Roache, P. J., *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque, p.199, 1998.
- [12] Wang, Y. L., and Longwell, P. A., Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates, *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 10, No.3, pp. 323-329, 1964.